MATEMÁTICAS II

LOMCE

José M. Ramos v.2.0.

Este libro es totalmente gratuito y solo vale la tinta y el papel en que se imprima. Es de libre divulgación y no está sometido a ningún copyright. Tan solo se pide que, en caso de distribución, se indique el nombre de su autor.

Las nociones que a continuación se exponen son resultado de la intención de recopilar en un texto los contenidos de la materia de Matemáticas II de segundo curso de bachillerato LOMCE, siguiendo las pautas del currículo de dicha materia, establecido en el Decreto 86/2015, de 25 de junio, por el que se establece el currículo de educación secundaria obligatoria y del bachillerato en la Comunidade Autónoma de Galicia..

No se trata de un libro de texto sino de una guía de apoyo al alumnado con los conceptos teóricos y prácticos que necesita.

El desarrollo más exhaustivo siempre lo realizará el profesor.

José Manuel Ramos González

I.E.S. A Xunqueira I
Pontevedra, septiembre 2016

Todos los dibujos, esquemas y gráficos fueron realizados con Paint.Net v4.03.
Las representaciones de algunas gráficas de funciones fueron realizadas con la aplicación online Evaluador y graficador de funciones (v 3.4) (http://www.zweigmedia.com/MundoReal/functions/func.html)

ÍNDICE

BLOQUE DE ÁLGEBRA

TEMA I. MATRICES Y DETERMINANTES 7
- Ejercicios resueltos 17
- Ejercicios propuestos 27

TEMA II. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 31
- Ejercicios resueltos 37
- Ejercicios propuestos 49

BLOQUE DE GEOMETRÍA

TEMA III. EL ESPACIO VECTORIAL V3 53
- Ejercicios resueltos 61
- Ejercicios propuestos 65

TEMA IV. EL ESPACIO AFIN TRIDIMENSIONAL 67
- Ejercicios resueltos 77
- Ejercicios propuestos 87

BLOQUE DE ANÁLISIS

TEMA V. CALCULO DIFERENCIAL 93
- Ejercicios resueltos 105
- Ejercicios propuestos 113

TEMA VI. CALCULO INTEGRAL 119
- Ejercicios resueltos 129
- Ejercicios propuestos 133

BLOQUE DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

TEMA VII. ALGEBRA DE SUCESOS 139
- Ejercicios propuestos 142

TEMA VIII. PROBABILIDAD 143
- Ejercicios propuestos 147

TEMA IX. VARIABLE ALEATORIA 155
- Ejercicios propuestos 159

TEMA X. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL 167
- Ejercicios propuestos 170

TEMA XI. DISTRIBUCIÓN NORMAL 173
- Ejercicios propuestos 177
- Suplemente. Ejercicios resueltos de variable aleatoria 179

APÉNDICE. TABLAS 187

TEMA I

MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES

Definición.- Se llama matriz A de orden **nxp** a un conjunto de **np** números reales ordenados en **n** filas y **p** columnas. Los elementos numéricos que constituyen una matriz se representan mediante la expresión $\mathbf{a_{ij}}$, donde los subíndices **i** y **j** indican, respectivamente, la fila (i) y la columna (j) que ocupa dicho elemento en el conjunto de la matriz.
Representamos el conjunto de matrices nxp por $\mathcal{M}_{nxp}$

Ejemplo de una matriz 2x3

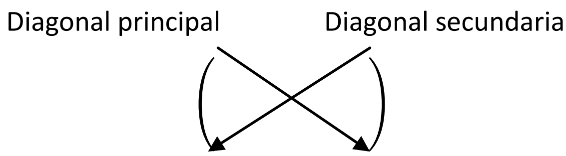
$$\begin{array}{cc} & \text{3 columnas} \\ & \downarrow \\ \text{2 filas} \longrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_{11}= 3$; $a_{12}= 1$; $a_{13}= 0$; $a_{21}= 4$; $a_{22}= 5$; $a_{23}= 6$

Tipos de matrices.- Según su orden y su composición, algunas matrices tienen una denominación particular por sus peculiaridades. Así, dentro de las matrices de orden nxp, tenemos:

a) *Matriz nula*.- Es aquella cuyos componentes numéricos son todos 0.
b) *Matriz cuadrada*.- Es aquella en la que el número de filas coincide con el número de columnas (**n=p**). Es una matriz que se va a utilizar con frecuencia, por lo que su orden se expresa simplemente citando un valor (**n**).

Dentro de una matriz cuadrada de orden n, se llama *diagonal principal* al conjunto de números a_{ij} tales que i = j.
Dentro de una matriz cuadrada, se llama *diagonal secundaria* al conjunto de números a_{ij} tales que i + j = n+1



c) *Matriz identidad*.- Una matriz cuadrada se llama matriz Identidad de orden n cuando los elementos de la diagonal principal son unos y el resto 0, es decir:

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i=j \quad \text{y} \quad a_{ij} = 0, \text{ si } i\neq j$$

La matriz identidad de orden 3 es:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) *Matrices triangulares*.- Una matriz cuadrada es *triangular superior* si los elementos que están situados por debajo de la diagonal principal son 0. Por el contrario es triangular inferior si son 0 los elementos situados por encima de la diagonal principal:

triangular inferior.- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ triangular superior.- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

En la triangular inferior se cumple que $a_{ij}=0$ si $i<j$
En la triangular superior se cumple que $a_{ij}=0$ si $i>j$

e) *Matríz simétrica*.- Es aquella matriz cuadrada en la que $a_{ij} = a_{ji}$ con $i\neq j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

f) *Matriz antisimétrica*.- Es aquella matriz cuadrada en la que $a_{ij} = -a_{ji}$. En consecuencia los elementos de la diagonal principal son nulos ($a_{ii} = 0$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

g) *Matriz diagonal*.- Matriz cuadrada en la que todos sus elementos son cero salvo los de la diagonal principal.

h) *Matriz traspuesta*.- Dada una matriz A de orden nxp, se llama matriz traspuesta de A a la matriz A^t de orden pxn, que se obtiene transformando las filas de A en columnas y las columnas en filas.

Si una matriz A es simétrica, se verifica que $A^t = A$
Si una matriz A es antisimétrica, $A^t = -A$ ($A+A^t$ es la matriz nula).

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

i) *Matriz fila*.- La que tiene una sola fila. B= (2 3 4 5)
j) *Matriz columna*.- La que tiene una sola columna. B^t
k) *Matriz escalar*.- Matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal iguales.

OPERACIONES CON MATRICES

Suma:
Dadas dos matrices A, B de orden nxp, se define la suma, como la matriz A+B de orden nxp que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición relativa en ambas matrices.

$A= (a_{ij})$ i=1…n; j=1…p $B = (b_{ij})$ i=1…n; j=1…p

$A+B = (c_{ij})$ i=1…n; j=1…p de modo que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Si las matrices no tienen el mismo orden, no pueden sumarse.

Propiedades de la suma:

a) Commutativa A+B = B+A
b) Asociativa (A+B)+C = A+(B+C)
c) Elemento neutro: Es la matriz nula de orden nxp, A+(0) = A, siendo (0) la matriz nula de orden nxp
d) Elemento opuesto de A. Es la matriz –A, de modo que A+(-A) = (0)

Con estas propiedades, el conjuntos de matrices de orden nxp con la operación suma, es un *grupo aditivo abeliano.*

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 5 & 8 & 2 \\ 10 & -12 & 14 \end{pmatrix}$$

Producto por escalares:

Sea A una matriz de orden nxp y k un número real. Se define la matriz k.A de modo que si A= (a_{ij}) i=1…n; j=1…p, entonces kA= (k.a_{ij}) i=1…n; j=1…p

Ejemplo:

$$2.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & -12 \\ 10 & -12 & 14 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices combinando la suma con el producto por escalares:

a) Distributiva (k+k')A = k.A+k'.A
b) Distributiva k(A+B) = k.A + k.B
c) (k.k')A = k. (k'.A)
d) 1.A = A

$$\forall A \in \mathcal{M}_{nxp} \quad \forall k, k' \in \mathbb{R}$$

$(\mathcal{M}_{nxp}, +, \ .esc.)$ es un ***espacio vectorial*** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$

Producto de matrices.-

Dadas dos matrices A, B de orden nx**p**, y **p**xq respectivamente, se define el producto como la matriz C de orden nxq, de modo que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} \quad \text{con i =1…n; j=1…q}$$

Obsérvese que, según la definición, para que dos matrices puedan multiplicarse, *el número de columnas de la primera ha de coincidir con el número de filas de la segunda.*

Este hecho relevante nos indica que *el producto de matrices no es conmutativo.*

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 9 \\ 49 & -4 & 32 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2}_X3).(3_X\mathbf{3}) = (\mathbf{2}_X\mathbf{3})$$

Propiedades del producto de matrices:

a) Asociativa (A.B).C = A.(B.C)
b) En el conjunto de matrices cuadradas A.I = I.A = A, siendo I la matriz identidad de igual orden que A.
c) Distributiva respecto de la suma A(B+C) = A.B + A.C

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Definición.- Se llama permutación de n elementos a cualquier aplicación biyectiva σ entre el conjunto de los primeros n números naturales (1,2,3…n) y él mismo.
Así: $\sigma(1) = 1;\ \sigma(2) = 3;\ \sigma(3) = 2$ es una permutación de 3 elementos. Por economía se suele identificar la aplicación biyectiva con el conjunto imagen, es decir (1,3,2)

Se llama orden natural a la permutación (1,2,3…n).

Por ejemplo, las permutaciones de 3 elementos son 6:
1,2,3 ; 1,3,2 ; 2,1,3; 2,3,1; 3,1,2; 3,2,1 siendo 1,2,3 el orden natural.

En general, el número de permutaciones de n elementos viene dado por n!
n! = n (n-1)(n-2)…3.2.1
En el ejemplo anterior, las permutaciones de 3 elementos son 3! = 3.2.1 = 6.

Denominaremos el conjunto de las permutaciones de n por S_n

Inversiones en una permutación.- Dada una permutación $\boldsymbol{\sigma}$ de n elementos, se dice que i y j presentan una **inversión**, si en la permutación, i y j están desordenados en relación con el orden natural. Es decir que si i<j $\Longrightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$

En la permutación de 5 elementos (1,**3**,5,4,**2**) 3 y 2 presentan una inversión porque han alterado el orden natural.
Dada la permutación de n elementos $\boldsymbol{\sigma}$**,** representaremos el número de inversiones por I($\boldsymbol{\sigma}$)**.**

En la permutación 1,3,5,4,2 los pares 3,2 ; 5,4; 5,2; 4,2 son las inversiones presentes, por tanto I$(\sigma) = 4$

Signatura o paridad de una permutación.-

Dada la permutación de n elementos σ, se llama **signatura** de σ a

$$sig(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$

es decir que la signatura vale 1 si el número de inversiones es par (permutación par)
La signatura vale -1 si el número de inversiones es impar (permutación impar)

***Determinante de una matriz cuadrada*:**

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$. Se llama **determinante** de A, y se representa por |A|, al número real siguiente:

$|A| = \sum_{\sigma \epsilon S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}$

Obsérvese que en cada sumando (hay n! sumandos, puesto que el número de permutaciones de n es n!) se toma un *único* elemento de cada fila y de cada columna, precediendo el producto de la signatura de la permutación que conforma los subíndices de las columnas, manteniendo siempre el subíndice de las filas en el orden natural.

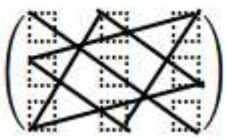
Ejemplo: En el determinante de una matriz cuadrada de orden 2, tenemos que las permutaciones de 2 elementos son $\sigma_1(1{,}2)$ y σ_2 (2,1)
$\mathrm{I}(\sigma_1) = 0$ $\mathrm{I}(\sigma_1) = 1$

$|A| = a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} - a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22-}a_{12}a_{21.}$ Esto es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria.

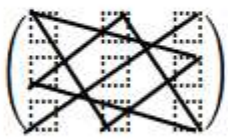
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22-}a_{12}a_{21}$$

***Determinante de una matriz de orden 3. Regla de Sarrus*:**

Factores positivos



Factores negativos



$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$

$a_{13}a_{22}a_{31}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

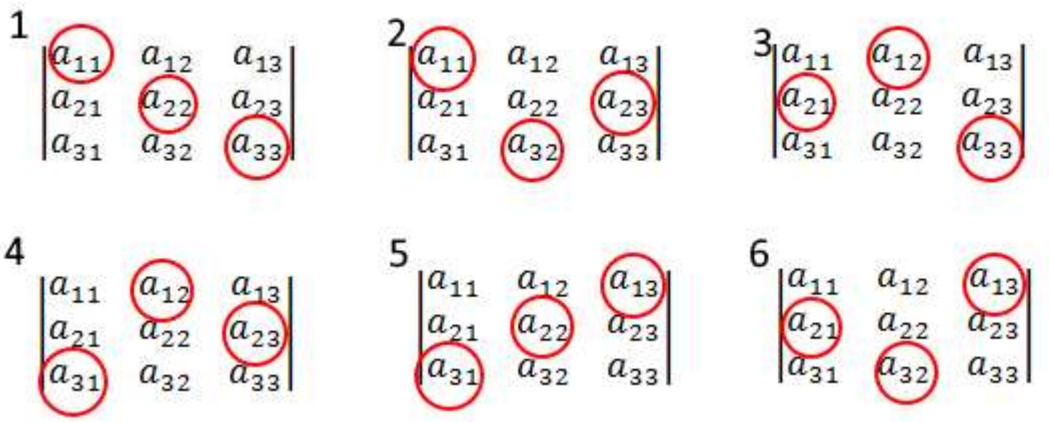
Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.4.2 + 1(-1)(-2) + 2.3.3 - 3.4(-2) - 1.2.2 - (-1).3.1 = \mathbf{51}$$

Determinante de una matriz de orden 3 según la definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n, se define el determinante de A y se suele denotar por |A| o bien det(A) a la suma de los n! productos (signados) formados por n-factores que se obtienen al multiplicar n-elementos de la matriz de tal forma que **cada producto contenga un solo elemento de cada fila y columna de A.**



Se obtienen los 6 (n!) sumandos de 3 (n) factores siguientes (filas en orden natural y columnas permutadas):

1) $a_{11}a_{22}a_{33}$ asociada a la permutación (1,2,3); Inv =0; signo +
2) $a_{11}a_{23}a_{32}$ asociada a la permutación (1,3,2); Inv =1; signo -
3) $a_{12}a_{21}a_{33}$ asociada a la permutación (2,1,3); Inv =1; signo -
4) $a_{12}a_{23}a_{31}$ asociada a la permutación (2,3,1); Inv =2; signo +
5) $a_{13}a_{22}a_{31}$ asociada a la permutación (3,2,1); Inv =3; signo -
6) $a_{13}a_{21}a_{32}$ asociada a la permutación (3,1,2); Inv =2; signo +

O bien:

Se obtienen los 6 sumandos siguientes (filas permutadas y columnas en orden natural):

1) $a_{11}a_{22}a_{33}$ asociada a la permutación (1,2,3); Inv =0; signo +
2) $a_{11}a_{32}a_{23}$ asociada a la permutación (1,3,2); Inv =1; signo -
3) $a_{21}a_{12}a_{33}$ asociada a la permutación (2,1,3); Inv =1; signo -
4) $a_{31}a_{12}a_{23}$ asociada a la permutación (3,1,2); Inv =2; signo +
5) $a_{31}a_{22}a_{13}$ asociada a la permutación (3,2,1); Inv =3; signo -
6) $a_{21}a_{32}a_{13}$ asociada a la permutación (2,3,1); Inv =2; signo +

Para el cálculo de los determinantes de orden superior a 4, veremos a continuación como se pueden reducir a órdenes inferiores para ser resueltos.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

En este capítulo llamamos línea, a una fila o columna indistintamente y siempre que mencionemos las matrices se entenderán que son cuadradas si no se indica lo contrario.

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta: $|A| = |A^t|$

2) Si $|A|=0$ si:

   a) Dos filas o columnas son iguales
   b) Todos los elementos de una línea son cero
   c) Una fila o columna es combinación lineal de las otras.

3) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

4) Si intercambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

5) Si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra, multiplicada previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Esta propiedad combinada con la número 3, me permite hacer ceros en la matriz para reducir los cálculos en la obtención de determinantes (Método de Gauss)

6) Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, ***y solo una***. Una generalización de esta propiedad es que el determinante de un número k por una matriz A, de orden n, es k^n por el determinante de A. ($|k.A| = k^n|A|$)

7) Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos o más sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos o más determinantes en los que las demás filas o columnas permanecen invariables.

8) $|A.B|=|A|.|B|$

Cálculo del determinante. Método de Gauss.

Utilizando la propiedad 3 y 5 de las citadas anteriormente, hacemos ceros por encima de la diagonal principal o por debajo, y el determinante será, por la propiedad 3, el producto de los elementos de la diagonal principal.
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25$$

$F_2 = F_1 + F_2,\quad F_3 = (-2)F_1 + F_3$

RANGO DE UNA MATRIZ

Definición. Dada una matriz A de dimensión mxn podemos elegir en ella k filas y k columnas. Se llama **menor** de orden k de A al determinante de la matriz de orden k formada por los elementos situados en los cruces de dichas k filas y k columnas.
Observa que puede haber muchas formas de elegir k filas y k columnas, por tanto una matriz puede tener muchos menores de orden k. Además, aunque no es necesario que las filas o columnas sean consecutivas sí han de estar 'ordenadas'.

Definición.
Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, y sea a_{ij} un elemento de dicha matriz. Llamamos **menor complementario** del elemento a_{ij}, al determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento a_{ij}. Este valor se representa por m_{ij}.

Definición.
Sea $A \in \mathcal{M}_{nxp}$, una matriz de orden nxp. Se llama **rango** de A, *al orden*[1] *del mayor menor no nulo que contenga la matriz.*

El concepto de rango es muy importante para posteriores estudios.

Proposición.
El rango de una matriz coincide con el mayor número de filas o columnas linealmente independientes.

MATRIZ ADJUNTA

Definición. Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, cuadrada de orden n. Sea a_{ij} un elemento de dicha matriz. Llamamos **adjunto de a_{ij}** al valor del menor complementario obtenido al eliminar la fila i y la columna j en A, con el signo + o -, según que i+j par o i+j impar respectivamente. Al adjunto lo representamos por A_{ij}. Es decir que $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, Vamos a calcular el adjunto del elemento $a_{23} = 6$.
El menor complementario que se obtiene al eliminar la fila 2 y la columna 3 que es la posición del 6, es el siguiente:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es -2. Dado que 2+3 es impar, el adjunto buscado es 2, es decir que $A_{23} = 2$.

Definición.- Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, cuadrada de orden n. Se llama **matriz adjunta** de A, y la representaremos por $\bar{A}$, a la matriz formada por los adjuntos de A en sus posiciones relativas.

[1] Se define menor como un determinante, por tanto cuando se habla del orden del menor nos referimos al orden de la matriz cuyo determinante es dicho menor.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, su matriz adjunta es $\bar{A} = \begin{pmatrix} 23 & -10 & -7 \\ -12 & 4 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

***Cálculo de determinantes por adjuntos*:**

Proposición.-
El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos de una fila o columna por sus correspondientes elementos adjuntos.
Esto nos permitirá calcular determinantes de orden superior y reducirlos a órdenes menores.
Veamos un par de ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 23 - 20 - 7 = -4$$

Para abreviar cálculos es interesante utilizar el desarrollo por una línea o columna con el mayor número de ceros posibles. En caso de que no haya ceros, se pueden obtener utilizando la propiedad 5 de los determinantes, como en el ejemplo siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 \\ 0 & 6 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -7 & 7 & -9 \\ 6 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 43 & -9 \\ 30 & -33 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 43 \\ 30 & -33 \end{vmatrix} = -1950$$ 15

F3=-5.F1+F3 y F4=2F1+F4 C1=-3.C3+C1 y C2=-4C3+C2

MATRIZ INVERSA

***Definición*.-** Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, cuadrada de orden n y determinante no nulo. Se llama **matriz inversa** de A, y la representaremos por A^{-1}, a aquella matriz cuadrada de orden n, tal que:

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

La matriz inversa $A^{-1} = \frac{\bar{A}^t}{|A|}$, es decir la adjunta de la traspuesta (o la traspuesta de la adjunta), multiplicada por el inverso del determinante de A.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea no nulo.
Una matriz que tiene inversa se llama *regular*. Si no la tiene se llama *singular*.

Ejemplo: Pasos para el cálculo de la inversa.

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 1º) Se calcula el determinante. Si este fuese cero, no existe inversa.

|A|= 35+36+8-15-12-56 = -4 $\neq$ 0

2º) Se calcula la matriz adjunta, que en este caso es $\bar{A} = \begin{pmatrix} 23 & -10 & -7 \\ -12 & 4 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3º) Se traspone la matriz adjunta, obteniendo

$$\bar{A}^t = \begin{pmatrix} 23 & -12 & 7 \\ -10 & 4 & -2 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

4º) Se divide por -4

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -23/4 & 3 & -7/4 \\ -5/2 & -1 & 1/2 \\ 7/4 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que es correcto el cálculo, basta multiplicar A.A^{-1} y A^{-1}.A. El resultado debe ser la matriz identidad de orden 3.

PROPOSICION: Si A es inversible, |A^{-1}|== $\frac{1}{|A|}$

Demostración:

Si A es inversible, A.A^{-1} = I $\Rightarrow |A.A^{-1}| = |I| = 1$ Por la propiedad 8 de los determinantes, |A|.|A^{-1}|=1 $\Rightarrow$ |A^{-1}|== $\frac{1}{|A|}$

Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa:

Ejemplos: Cálculo de la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

F2 = (-3)F1+F2 F2= F1+F2 F2 = F2/(-2)

La inversa es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo de matriz de orden 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

F3 = F3/2 F2=(-2)F1+F2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

F1= F1-F3 F2=F3+F2

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

a) Hallar A^{-1} y B^{-1}
b) Calcular el determinante de $AB^{2013}A^{t}$
c) Resolver la ecuación AX-B = AB

a) |A|= 2, |B| = 0. Para B no hay matriz inversa.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\quad A^{-t}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-1&1&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$$

b) $|AB^{2013}A^{t}| = |A|.|B|^{2013}.|A^{t}| = 2.0.2 = 0$

c) AX-B = AB ; $A^{-1}(AX-B) = A^{-1}(AB)$; $X- A^{-1}B = B$; $X = B + A^{-1}B$

$$X=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-1&1&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&5/2\\3&-3&1/2\\0&0&-3/2\end{pmatrix}$$

2) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$

Hallar X / AXB = C^{t}

|A| = 1 , |B| = -1 $\quad \bar{A}=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-2&1&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&4\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$$\bar{B}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}\,C^{t}\,B^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix}-3&-2&4\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

3) Sea A = $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar λ para que A^2+3A no tenga inversa.
Para $\lambda = 0$ hállese X / AX+A = 2I

$A^2+3A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+5\lambda+4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix}$

$|A^2+3A| = -2\lambda^2-10\lambda-8 = 0$; $-\lambda^2-5\lambda-4 = 0$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $|A| = -1$; $\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $tras(\overline{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AX+A = 2I ; A^{-1} (AX+A) = A^{-1} 2I; X = A^{-1} 2I – I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

4) Demostrar que si |A|≠0, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Puesto que según la propiedad 8 de los determinantes que nos dice que |A.B| = |A|.|B|
$1 = |I| = |A.A^{-1}| = |A|.|A^{-1}|$, de donde $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5) Sean A y B dos matrices de orden 3 tal que |A| = ½ y |B| = -2. Calcular:
$|A^3|$ $|A^{-1}|$ |-2A| $|AB^t|$ rang(B)

$|A^3| = 1/8$ $|A^{-1}| = 2$ $|-2A| = -4$ $|AB^t| = -1$ rang(B) = 3

6) Sea A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar α de modo $A^{-1} = \frac{1}{12}A$
b) Para $\alpha = -3$, hallar X tal que $A^tX = B$

a) Si multiplico por A, tenemos que 12.I = A^2, es decir: $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2-\alpha & \alpha+3 \\ -\alpha^2-3\alpha & -\alpha+9 \end{pmatrix}$, igualando miembro a miembro resulta que

$$\alpha = -3$$

b) $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $|A^t| = -12$ $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2/3 & 5 & 7/3 \end{pmatrix}$$

7) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}}$ **y B=** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

a) Hallar el rango de A en función de $\propto$

b) Para $\alpha = 2$ resuelve la ecuación matricial $A^tX = B$

a) $|A| = \propto^3 - 3\propto + 2 = 0$, para α = 1, -2

Si $\alpha = 1$, rango de A es 1, pues no existe menor complementario de orden 2 no nulo.
Si $\alpha = -2$, rango de A es 2, pues encontramos menores de orden 2 no nulos.
Si $\alpha \neq -2$ y Si $\alpha \neq 1$, el rango de A es 3.

b) $X = (A^t)^{-1}B = (0 \quad ½ \quad 2)$

8) Dadas las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

a) Hallar el valor de $\boldsymbol{\lambda}$ **para que A no tenga inversa.**

b) **Para $\boldsymbol{\lambda = 1}$, resuelve A^{-1} X A** = B

a) |A| = $\boldsymbol{\lambda^2 + 1}$ **= 0. A tiene inversa para todo valor de $\boldsymbol{\lambda}$**

b) $X = A\,B\,A^{-1}$

$|A| = 2$; $\quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

9) Dadas la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}}$

a) rango(A) en función de k

b) Para k=0, hallar A^{-1}

a) $|A| = k + 9 + 7k^2 - k - 21 - 3k^2 = 4k^2 - 12 = 0 \quad k = \pm\sqrt{3}$

Si $k = \sqrt{3}$, rango = 2 . Si $k = -\sqrt{3}$, rango =2. Si $k \neq \pm\sqrt{3}$, rango = 3.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $|A| = -12$ $\quad Adj(A) = \begin{pmatrix} -21 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

10) Dada la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}}$

a) Hallar m para que rango (A) < 3

b) Resolver la ecuación A$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ **para los valores de m del apartado a**

$|A| = m^4 - 2m^3 + m^2 = m^2(m^2 - 2m + 1) = 0$; $m = 0$, $m = 1$

Si m = 0, el rango de A es 1. Si m=1, el rango de A es 1.

Para m = 0 no tiene solución
Para m = 1 tiene infinitas soluciones: x+y+z = 1.

11)

a) **Hallar m, para que A =** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}}$ **verifique** $\boldsymbol{2A^2 - A = I_2}$ **y hallar** $\boldsymbol{A^{-1}}$ **para dicho valor de m, utilizando el método de Gauss y el cálculo por adjuntos.**

b) **Si M es cuadrada de modo que** $\boldsymbol{2M^2 - M = I}$**, determinar** $\boldsymbol{M^{-1}}$ **en función de M e I.**

$2A^2 - A = I_2$, implica, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2m+2 & 2m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donde:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2m+2 & 2m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1+m \end{pmatrix}$$

se tiene que verificar simultáneamente que 2m+2 = 1, $2m^2=1+m$. De la primera ecuación, obtenemos que m = -1/2, y de la segunda m = 1 y m = -1/2, de donde la solución es m = -1/2.

Calculo de A^{-1} por el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

F2= (-1)F1+F2 F2= (-2)F2

Por el otro método, sería: $|A| = -1/2$, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si la trasponemos $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y dividimos por -1/2, obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$2M^2 - M = I$ multiplicando ambos miembros por la derecha por M^{-1} resulta que $2M - I = M^{-1}$

12) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{-a} \end{pmatrix}$

a) **Calcula a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$**
b) **Escribir en función de a, los determinantes de 2A y A^t**
c) **¿Existe algún valor de a para que A sea simétrica? Razona la respuesta.**

$A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a^2 - a = 12, & a = 4, -3 \\ a^2 + a = 20, & a = 4, -5 \end{cases}$ Sol: a =4.

c) $|2A| = -4a^2$ $|A^t| = -a^2$

No existe ningún valor de a para que A sea simétrica, puesto que $a_{12} \pm a_{21}$ para cualquier valor de a.

13) Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$ Calcular, indicando las propiedades que se utilizan:

$\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = 3(-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 18$ (propiedad 6 de los determinantes)

; $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$ = -2 $\begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix}$ = 2$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$ (propiedad 6 y 4)

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6$
(propiedad 6 y 7)

14. Sea M = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* N = M + I, donde I denota la matriz identidad de orden n, calcula N^2 y M^3. ¿Son M o N inversibles? Razonar la respuesta. (Santiago junio 2001)

SOLUCIÓN:

N = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ N^2 = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y M^3 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

M no es inversible pues det (M) = 0. N es inversible pues det(N) = 1.

15. Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las filas de una matriz cuadrada de orden P 4x4 tal que su determinante vale 3. Calcular razonadamente el valor del determinante de la inversa de P, el valor del determinante de la matriz αP, donde α denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz tal que sus filas son $2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4$
(Santiago junio 2001)

SOLUCIÓN:

$|P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{3}$; $|\alpha P| = \alpha^4|P| = 3\alpha^4$; $\begin{vmatrix} 2F_1 - F_4 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_4 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} =$

Obsérvese que el segundo determinante tiene dos filas iguales, por lo que su valor es 0.

14.$\begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_4 \end{vmatrix}$ - 0 = -14 $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix}$ = -42

16. Calcula los valores del parámetro a para los cuales la matriz M no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de M para a =2, si es posible.

$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-a} \end{pmatrix}$ **(Santiago, Septiembre 2001)**

SOLUCIÓN:

|M| = -a^2 + 4a – 3. Ecuación de segundo grado de raíces 1 y 3. Para esos valores M no tiene inversa.
Si la tiene para a = 2. |M|= 1. Escribimos la matriz adjunta de M, $\overline{M} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ la trasponemos, dividimos por |M| y obtenemos la inversa:

M^{-1} = $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

17. Dadas tres matrices A, B y C se sabe que A.B.C es una matriz de orden 2x3 y que B.C es una matriz de orden 4x3, ¿cuál es el orden de A? Justifíquelo. (Santiago, junio 2002)

SOLUCIÓN:
Para poder multiplicarse dos matrices, el número de columnas del primer factor ha de coincidir con el número de filas del segundo factor y el resultado del producto es de orden el número de filas del primer factor por el número de columnas del segundo factor. Por lo tanto Si B.C es de orden 4x3, ya sabemos que B es de orden 4xa y C de orden ax3. Ahora bien, A.B.C es de orden 2x3, como BC es 4x3 A tiene que tener 4 columnas, y 2 filas. A es 2x4

18. Hallar, si existe, una matriz X que verifique la ecuación B^2X-BX+X = B, siendo B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN

Sacamos factor común a X en el primer miembro: $(B^2-B+I_2)X = B$
Si B^2-B+I_2 tiene inversa, multiplicando a la izquierda por la inversa, resulta que
$X= (B^2-B+I_2)^{-1}B$

C = B^2-B+I_2 = $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ cuyo det es 21, no nulo, por tanto tiene inversa que es: $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Por tanto X = $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

19. Se consideran dos matrices A y B que verifican A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ y A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $A^2 - B^2$ (Santiago, junio 2003)

SOLUCIÓN:
Hay que tener presente que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA$ pero $AB \neq BA$ por lo que en matrices no se verifica la igualdad $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Lo más rápido es calcular A y B resolviendo el sistema A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ y A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sumando ambos miembros 2A = $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; A =$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Restando ambos miembros 2 B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$: B = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 - B^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 55 & 25 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 62 & 26 \\ 33 & 38 \end{pmatrix}$

20. Calcular por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, el determinante. (Santiago, junio 2003)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2+a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{2+b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{2+c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a+b+c & b & c \\ 2+a+b+c & 2+b & c \\ 2+a+b+c & b & 2+c \end{vmatrix} = (2+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 2+b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$(2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 0 & 2+c \end{vmatrix} + (2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$(2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$(2+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})$$

21. Demostrar que la matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo A^2 + mA + nI = 0. Determinando m y n (I denota la matriz identidad). Utilice este hecho para calcular la inversa de A. (Santiago, junio 2003)

De la igualdad A^2 + mA + nI = 0, se obtiene m = -4, n = 3.

Multiplicando por A^{-1}, se obtiene A + mI+nA^{-1} = 0 de donde $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

22. Demostrar que toda matriz cuadrada de orden 3 se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. (Santiago, junio 2004)

En efecto: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+d}{2} & \frac{c+g}{2} \\ \frac{b+d}{2} & e & \frac{f+h}{2} \\ \frac{c+g}{2} & \frac{f+h}{2} & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-d}{2} & \frac{c-g}{2} \\ -\frac{b-d}{2} & 0 & \frac{f-h}{2} \\ -\frac{c-g}{2} & -\frac{f-h}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Que son simétrica y antisimétrica respectivamente

23. Determinar, empleando el método de Gauss, para hallar el rango de la matriz (Santiago, junio 2004)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} 1\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} 2\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} 3\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $\begin{cases} \mathrm{F1} = -2.\mathrm{F4} + \mathrm{F1} \\ \mathrm{F2} = -\mathrm{F3} + \mathrm{F2} \\ \mathrm{F3} = -3\mathrm{F4} + \mathrm{F3} \end{cases}$ Paso 2 $\begin{cases} \mathrm{F1} = -3\mathrm{F3} + \mathrm{F1} \\ \mathrm{F2} = -\mathrm{F4} + \mathrm{F2} \\ \mathrm{F2} = \mathrm{F2}/-2 \end{cases}$ Paso 3 $\begin{cases} \mathrm{F1} = 7\mathrm{F2} + \mathrm{F1} \end{cases}$

Rango es el número de filas no nulas, es decir 3.

24. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$ Hallar una matriz X tal que AX+B=0
(Santiago, septiembre 2004)

$|A| = -5$; A tiene inversa que es: $\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $X = -A^{-1}.B = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

25- Hallar todas las matrices A = (a_{ij}), cuadradas de orden 3, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ y A + A^t = 4I, siendo I la matriz identidad de orden tres y A^t la matriz traspuesta de A, de las que además se sabe que su determinante vale 10. (Santiago, junio 2005)

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ de esta igualdad tenemos que

$a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 2$. Por otra parte tenemos que $a_{13} + a_{31} = 0$; $a_{31} = -a_{13}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a_{13} \\ 0 & 2 & 0 \\ -a_{13} & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $8 + 2a_{13}^2 = 10$: $a_{13} = \pm 1$

Las matrices pedidas son : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

26. Dadas la matrices A = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y B = (0 -1 -1) Se pide:

Calcular los valores del parámetro m para los que A tiene inversa.
Para m = 0. Calcula A^3 y A^{25}.
Para m = 0, calcula la matriz X que verifica X.A = B (Santiago, junio, 2006)

$|A| = m^2 - 1 = 0$; $m = \pm 1$. Para m = 1 y para m = -1 la matriz no tiene inversa.

Para m = 0. A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$A^{25} = (A^3)^8 . A = (-I)^8. A = I.A = A$

Si XA = B, $X = B.A^{-1} = (0\ -1\ -1).\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1\ 0\ 1)$

27. a) Sean A, B y C tres matrices tales que el producto A.B.C es una matriz 3x2 y el producto A.C^t es una matriz cuadrada. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.

b) Dada M = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices X que conmutan con M, es decir, verifican XM = MX.

c) Calcula la matriz Y que verifica M.Y + M^{-1}.Y = I, siendo I la matriz unidad de orden 2. (Santiago, septiembre 2006)

a) Si A.B.C. es 3x2, sabemos que A es 3xp y que C es qx2 B es pxq

C^t es 2xq. Como A.C^t es cuadrada y es 3xq, implica que q =3 y para que exista A.C^t se tiene que verificar que p = 2. Conclusión: A es 3x2, B es 2x3 y C es 3x2

b) Sea X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{cases} b-a=-a \\ -b=-b \\ d-c=a-c \\ -d=-d \end{cases}$ $b=0 \;\; y \, d=a$ Las matrices pedidas son $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ donde a, c son reales.

c) (M + M^{-1})Y = I; Y = $(M + M^{-1})^{-1}$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ M + M^{-1} = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Y = $(M + M^{-1})^{-1}$=$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

28 **Descompón la matriz $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en una suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.**

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

De donde a-d=12 y a+d =-1, por tanto: d= -13/2 y a = 11/2

c+f=-3 y c-f=-1, de donde: f = -1 y c = -2

b+e= 2 y b-e = -8, de donde: e=5 y b = -3

Asi pues:

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11/2 & -3 \\ 11/2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -13/2 & 5 \\ 13/2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS PROPUESTOS
(Soluciones en la página 29)

***Ejercicio 1*.-** Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con det (M) = -2. Calcular el valor del determinante de la matriz que tiene por filas F_1-F_2, $2F_1$, $F_2 + F_3$. (Santiago, junio 2007)

***Ejercicio 2*.-** Dada la matriz C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar dos matrices X e Y que verifican: $\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$ siendo C^t la matriz traspuesta de C. A la vista del resultado, indica que tipos de matrices son X e Y. (Santiago, junio 2007)

***Ejercicio 3*.-** Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ Se pide:
Estudiar el rango de A, en función de los valores de m.
Para m = -1, calcular la matriz X que verifica X.A + A = 2I. siendo I la matriz unidad de orden 3. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 4.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ Se pide

a) Calcular los valores de m para los A tiene inversa.
b) Para m = 1, calcula la matriz X que verifica X.A + X – 2A = 0 (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 5.

a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz M = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$
b) Para el valor m = 1, resuelve la ecuación matricial MX = $3A^t$, siendo A = (1 0 1). Para este valor de m, ¿cuánto valdrá el determinante de la matriz $2M^{21}$? (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 6.

a) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula los rangos de AA^t y de A^tA, siendo A^t la matriz traspuesta de A. Para el valor de a = 1, resuelve la ecuación matricial AA^tX = B, siendo B= $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con det (M) = -1 y que además verifica M^3+M+I = 0, siendo I la matriz unidad de orden 3. Calcula los determinantes de las matrices M+I y 3M+3I (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 7.

a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$
b) Resuelve la ecuación matricial A^2X = B, siendo A= $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 8. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Si I es la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de m para los que A+mI no tiene inversa. Calcula, si existe, la matriz inversa de A-2I.

b) Calcula la matriz X tal que $XA+A^t = 2X$. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 9.

a) Pon un ejemplo de matriz simétrica de orden 3 y otro de matriz antisimétrica de orden 3.

b) Sea M una matriz simétrica de orden 3, con det (M) = -1. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de $M + M^t$, siendo M^t la matriz traspuesta de M.

c) Calcula una matriz X simétrica de rango 1 que verifique: $X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 10.

a) Sean C1, C2, C3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det (M) = -4. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, -C2, 2C1-C3, C2+C3.

b) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos los valores de a y b para los que $A^{-1} = A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 11.

a) Si A es una matriz tal que $A^3+I = 0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula de orden 3, ¿cuál es el rango de A?. Calcula el determinante de A^{30}. Calcula A en el caso de que sea una matriz diagonal verificando la igualdad anterior.

b) Dada la matriz B = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula una matriz X tal que $BXB = B - B^{-1}$ (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 12. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz A.

b) Resuelve, si es posible, el sistema $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para m = 1. (Santiago, junio, 2012)

Ejercicio 13.

a) Calcula, según los valores de a, el rango de A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ Para a = 1, calcula el determinante de la matriz $2.A^t.A^{-1}$

b) Sea B=$\begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula x e y para que se cumpla que $B^{-1} = B^t$.

Ejercicio 14. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. B=$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

a) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de $AB^t + \lambda I$
b) Calcula la matriz X que verifica $AB^tX-X = 2B$. (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 15.

a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $(M-2I)^2X = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
b) Determina todas las matrices B de la forma $\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2 = 4B$. Si alguna es inversible, calcula su inversa.
c) ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica la respuesta. (Santiago, septiembre 2013)

Ejercicio 16.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & m\end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de m, el rango de A
b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m? Para m = 0, calcula A^{60}
c) Si m = 2 y A es la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que el sistema tiene solución única? Justifica la respuesta. (Santiago, septiembre 2013)

Ejercicio 17.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$. Descomponerla en una suma de una simétrica y otra antisimétrica.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS:

1) -4.
2) $X = \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$; X es simétrica e Y es antisimétrica.
3) Si m = 0, rango (A) = 1, Si m $\neq$ 0, rango (A) = 3 ; X = $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$
4) Tiene inversa para m $\neq$ 0 ; X = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & -5/4 & 1/4\end{pmatrix}$
5) Si m = 0, rango (A) = 1, Si m $\neq$ 0, rango (A) = 3 ; X = $\begin{pmatrix}0\\ -6\\ -3\end{pmatrix}$, -8
6) a) Rango $(A.A^t) = 3$ para cualquier valor de a. Rango $(A^t.A) = 2$, para cualquier valor de a. X = $\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$; b) det (M+I) = 1, det (3M+3I) = 27.
7) Si m = 4 rango(M) = 1, Si m $\neq$ 4 rango(M) = 3 ; , X= $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$

8) a) Si m = 1 o m = -1 no tiene inversa, en caso contrario, sí. $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ b) X = $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\1 & 5 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

9) a) $\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\4 & 3 & 5\\-1 & 5 & 7\end{pmatrix}$ $simétrica$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\-1 & 0 & -2\\-4 & 2 & 0\end{pmatrix}$ $antisimétrica$; b) $|M+M^t| = |2M| = 8\,|M| = -8$; c) $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

10) a) -8 ; b) a = ± 1 y b = 0

11) a) Rango (A) = 3 , $A^{30} = I$, $A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix}4 & -5\\-10 & 14\end{pmatrix}$

12) a) Si m = 0, rango (M) = 2 ; si m = 1, rango (M) = 1; si m = -1, rango (M) = 2; en cualquier otro caso, rango (M) = 3. b) x = 1 – α –β , y = β , z = α.

13) a) Si a = 0 o a = -1, rango (A) = 2, en caso contrario el rango(A) = 3. $|2^{at}A^{-1}| = 8$ b) x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; x = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, y = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

14) a) Si λ = 0, rango = 1; si λ= 2, rango = 2. En caso contrario, rango =3. b) $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

15) a) X = $\frac{1}{4}I$ b) $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$ ninguna es inversible. c) Un sistema homogéneo siempre es compatible (al menos tiene la solución trivial nula)

16) a) Si m = 1 o m = -1, rango (A) = 2, en caso contrario el rango es 3. b) Sí, para m = 0. $A^{60} = I$. c) Sí.

17) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\4 & 5 & 6\\3 & 2 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\3 & 5 & 4\\2 & 4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 2\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

TEMA II

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición:
Un sistema de n ecuaciones lineales con p incógnitas, es una expresión de la forma:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3p}x_p = b_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{gathered}$$

donde a_{ij} son los coeficientes reales del sistema, los x_j son las incógnitas del sistema y los b_i son los términos independientes.

Las operaciones con matrices nos permiten escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial de la siguiente manera: AX = B, siendo

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ matriz principal o de coeficientes, de orden nxp; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ matriz de incógnitas de orden px1; B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ matriz de términos independientes de orden nx1 ; la matriz A ampliada con la columna de B, se llama matriz ampliada y se representa por $(A|B)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$ se escribe en matricial así: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definición:
Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Compatibles (tienen solución)}} & \begin{cases} \textbf{\textit{Determinado (solución única) SCD}} \\ \textbf{\textit{Indeterminado (infinitas soluciones) SCI}} \end{cases} \\ \textbf{\textit{Incompatibles (sin solución) SI}} \end{cases}$$

Sistema homogéneo

Definición: Si la matriz de términos independientes, B, es 0, el sistema se llama homogéneo. Todo sistema homogéneo es compatible. Al menos tiene la solución X = 0

Sistema de Cramer:

Un sistema de ecuaciones lineales se llama sistema de Cramer, si el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y el determinante de la matriz principal no es nulo.

Dicho de otro modo, un sistema de ecuaciones lineales AX = B, es de Cramer si y solo si A es cuadrada y |A|≠0

PROPOSICIÓN:

Un sistema de Cramer siempre es compatible determinado (tiene una única solución)
En efecto, si |A|≠0, existe A^{-1}
Multiplicando AX=B por la izquierda por A^{-1}, obtenemos que X = A^{-1}B, que es la solución buscada.

Método de Cramer para resolución de sistemas de Cramer.-

Aparte del método matricial apuntado anteriormente, donde interviene la matriz inversa, se puede demostrar que la incógnita x_i de un sistema de Cramer, es el cociente entre el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i en A por la columna B, entre el determinante de A.

Ejemplo: Dado el siguiente sistema, comprobar que es de Cramer y resolverlo por matrices inversas y por el método de Cramer.

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x+3y-4z=-4 \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; |A| = 8 . Calculamos su adjunta $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Trasponemos la adjunta $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

X = $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ x = 1, y = 2, z =3

Resolvámoslo ahora por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{8} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{16}{8} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{24}{8} = 3$$

Es fundamental el dominio del método de Cramer, pues todo sistema compatible habrá que reducirlo a uno de Cramer para su resolución.

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS (Caracteriza los sistemas de ecuaciones lineales según su número de incógnitas)

Dado un sistema de n ecuaciones y p incógnitas $AX = B$

a) Si rango (A) = rango $(A|B)$ = nº incógnitas (p), el sistema es compatible determinado (tiene una única solución)
b) Si rango (A) = rango $(A|B) <$ nº incógnitas (p), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)
c) Si rango (A) ≠ rango $(A|B)$, el sistema es incompatible (no tiene solución)

Los sistemas de Cramer se incluyen todos en el caso a) puesto que al ser el número de ecuaciones igual al de incógnitas (n) y $|A|\neq 0$, el orden del mayor menor complementario que obtenemos es n, puesto que ese menor complementario es el determinante de la propia matriz A y la ampliada A|B es de orden nx(n+1) y por tanto su rango sigue siendo n.

Demostración del Teorema:
Para su demostración, indicaré la matriz A por columnas, del siguiente modo:
$A\,(C_1\, C_2 \ldots Cp)$ siendo $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. El sistema entonces se podrá escribir del siguiente modo: $C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \ldots\ C_px_p = B$

Demostración a)
Si rango (A) = rango (A|B) = p ⇒ rango $(C_1\, C_2 \ldots Cp)$ = rango $(C_1\, C_2 \ldots Cp\ B)$. Como el rango es el número máximo de columnas linealmente independientes, eso quiere decir que la columna B es dependiente de las demás, por tanto:
$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + \ldots\ C_p\alpha_p = B$, de donde hemos obtenido una solución del sistema que sería $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p)$. Además esta solución es única.
Supongamos que tuviésemos otra solución del sistema, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p)$., esto implicaría que $C_1\beta_1 + C_2\beta_2 + \ldots + C_p\beta_p = B$. Como teníamos que $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + \ldots\ C_p\alpha_p = B$, restando ambas expresiones, obtenemos $C_1(\beta_1 - \alpha_1) + C_2(\beta_1 - \alpha_1) + \ldots + C_p(\beta_1 - \alpha_1) = 0$, puesto que rango $(C_1\, C_2 \ldots Cp) = p$, las p columnas son linealmente independientes, por lo cual, según la definición de linealmente independientes, los escalares de la combinación lineal anterior deben ser 0; es decir $\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 = \ldots = \beta_p - \alpha_p = 0$
$\beta_1 = \alpha_1$; $\beta_2 = \alpha_2$; $\beta_3 = \alpha_3$; … $\beta_p = \alpha_p$. Con lo cual demostramos que la solución es única y por tanto el Sistema es Compatible determinado.
Demostración b)
Si rango (A) = rango (A|B) = r < p ⇒ rango $(C_1\, C_2 \ldots Cp)$ = rango $(C_1\, C_2 \ldots Cp\ B) = r$
Esto quiere decir que B puede escribirse como combinación de r columnas linealmente independientes de varias formas puesto que r <n. Entonces el sistema tiene más de una solución y es compatible indeterminado.
Demostración c) Si los rangos son distintos el sistema es incompatible, puesto que si fuese compatible B se podría escribir en c.l. de los C_i y por tanto la columna B no haría

variar el rango de la matriz principal, por lo que los rangos serían iguales. Así pues el sistema es incompatible.

Veamos algunos ejemplos: Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-y-z=-1 \\ 4x-y-3z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ su orden es 4x3}$$

Tomamos el menor complementario

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es -4, por tanto el orden del mayor menor complementario hallado en A es 3, es decir el rango(A)=3.

Veamos ahora el rango de $(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ que es una matriz 4x4, con lo que puede tener rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

F1=3F3+F1 ; F2=-2F3+F2

En consecuencia el rango de $(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ es 3.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, rango(A) = rango (A|B) = 3 = nº incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene solución única.

¿Cómo se resuelve? Hay que reducirlo a un sistema de Cramer equivalente. Para ello es fundamental el menor complementario hallado para determinar el rango de A, pues este menor se va a convertir en la matriz principal (todo menor complementario es cuadrado de det no nulo). Como en dicho menor se omite la última ecuación (porque es dependiente de las demás y no aporta ninguna información nueva al sistema), prescindimos de ella, es decir que el sistema de Cramer equivalente al dado sería:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

Que resolviéndolo por el método de Cramer, obtendríamos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1$$

Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ A es de orden 2x3 y A|B 2x4. A lo sumo ambas tienen rango 2. Veamos si encontramos algún menor complementario de orden 2 con determinante no nulo. Vemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ =1 ≠0. por tanto rango(A)=2 y rango(A|B) = 2.
Por el teorema de Rouché-Fröbenius los rangos coinciden pero su valor es menor que el número de incógnitas, por tanto estamos en el caso b) Sistema compatible indeterminado.

La resolución es la siguiente: Se trata de encontrar el sistema de Cramer equivalente. Como en el caso anterior, la nueva matriz principal será el menor complementario que ha determinado rango 2, es decir $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Ahora es la columna de la incógnita z, la que no tenemos en la matriz. En este caso dicha columna pasa a formar parte de los términos independientes, dando a z el valor de un parámetro que al variar irá obteniendo las distintas soluciones del sistema. Es decir que el sistema de Cramer[2] equivalente es:

$$\begin{cases} x + y = 2 + \lambda \\ 2x + 3y = 4\lambda \end{cases}$$

que ya podemos resolver:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 \\ 4\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 6 - \lambda \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 2 & 4\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 2\lambda - 4 \qquad z = \lambda$$

Al darle valores a λ, vamos obteniendo soluciones del sistema.
Ejemplo (6, -4, 0); (5, -2, 1), (7, -6, -1) …. etc.

Para comprobar que está correctamente resuelto, podemos sustituir cualquiera de estas soluciones en el sistema de partida (no en el de Cramer) y comprobar que satisfacen las ecuaciones dadas.

Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ El rango de A no es 2, pues todo menor complementario de orden 2 que tomemos en A tiene determinante nulo. Por tanto rango(A) = 1.Como menor complementario de orden 1, valdría cualquier elemento de A.
Ahora bien Veamos si encontramos algún menor de orden 2 con determinante no nulo en la matriz ampliada. En efecto si tomamos $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ vemos que es no nulo, por tanto rango (A|B) = 2. Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible, es decir que no tiene solución.

[2] El Sistema de Cramer equivalente no tiene porque ser único. Va a depender del menor complementario elegido a la hora de determinar la igualdad de rangos que nos hacen el sistema compatible.

Método de Gauss de resolución de Sistemas

Consiste en hacer ceros por debajo de la matriz ampliada utilizando combinaciones lineales de filas hasta que el proceso no pueda continuar y llegar a un sistema equivalente de inmediata o fácil resolución.

Veamos un ejemplo. Resolver por el método de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4/3 \end{array}\right)$$

F2=(-2)F1+F2 F3=(-2/3)F2+F3
F3=(-1)F1+F3

Hemos llegado al sistema escalonado siguiente:

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -3y-5z=-8 \\ 4/3z=4/3 \end{cases}$; de donde resolviendo directamente, z =1 ; y = 1; x = 1

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Estudiar el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y + z = 2a} \\ \boldsymbol{x - y + z = a - 1} \\ \boldsymbol{x + (a-1)y + az = a + 3} \end{cases}$$

Resolverlo si es posible para a = -1

Estudiamos en primer lugar el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + a + 1 = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a-1)$$

Este determinante se anula para a= -1/2, a = 1.
Estudiamos los siguientes casos:
Caso a = -1/2.

$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

En cuanto a la matriz ampliada

$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$ veamos si su rango puede ser 3. Para ellos tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 7/2 \end{vmatrix} = -13/8 \neq 0$, por tanto rango A|B = 3.

Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Caso a = 1

A|B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ rango A = 2 Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ rango (A|B) = 3

Aplicando el Teorema de Rouché-Fróbenius, el sistema es incompatible.

En caso de que a ≠ -1/2 y a ≠ 1, rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado.

Para a = -1, dado que estamos en el último caso, el sistema es compatible determinado y además es un sistema de Cramer. Por tanto puede resolverse por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = -2$$

2.- Estudiar el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + ay + z = 3a} \\ \boldsymbol{x - y + z = 2} \\ \boldsymbol{ax + y = 4a} \end{cases}$$

Resolverlo si es posible para a = 2.

Estudiamos en primer lugar el determinante de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + a = a(a+1)$ Se anula para a = 0 y a = -1

Estudiamos los siguientes casos:
Caso a = 0

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$= -1 ≠ 0

En cuanto a la matriz ampliada

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ veamos si su rango puede ser 3. Para ellos tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = -2 ≠ 0, por tanto rango A|B = 3.

Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Caso a = -1

A|B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ rango A = 2 Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$= -1 ≠ 0

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ entonces rango (A|B) = 3

Aplicando el Teorema de Rouché-Fróbenius, el sistema es incompatible.

Nos queda el caso en que a ≠ 0 y a ≠ -1

Ambos rangos coinciden y el sistema es compatible determinado.

Caso a = 2. Estamos en el último caso y además el sistema es de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 10/3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 4/3 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 0$$

3 .- Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + (a+1)z = 1} \\ \boldsymbol{ax = 2} \\ \boldsymbol{ax + 2z = 0} \end{cases}$$

Estudiamos en primer lugar el determinante de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2a$ Se anula para a = 0

Estudiamos los siguientes casos:
Caso a = 0

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$= 2 ≠ 0

En cuanto a la matriz ampliada

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ veamos si su rango puede ser 3. Para ellos tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = -4 ≠ 0 por tanto rango A|B = 3.

El sistema es incompatible.

Caso a ≠ 0
El sistema es compatible determinado, puesto que rang (A|B) = rang (A) = 3

Es además un Sistema de Cramer. La solución es (en función de a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-2a} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-(a-1)(a+4)}{-2a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2a}{-2a} = -1$$

4. Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 5} \\ \boldsymbol{y + z = a} \\ \boldsymbol{x - 2z = 3} \\ \boldsymbol{2x - 3z = a} \end{cases}$$

Estudiamos en primer lugar el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

A lo sumo puede ser 3. Estudiamos los menores de orden 3:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = -3 ≠ 0. Por tanto rango (A) = 3.

$$|A|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & a+5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a + 20$$

Si a = -10, el rango de (A|B) = 3. En caso contrario es 4. Por tanto el sistema solamente es compatible cuando a = 10.

Para resolverlo hay que buscar sus Sistema de Cramer equivalente. Para eso nos fijamos en el menor hallado para determinar la igualdad de rangos y vemos que es $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = -3 que se corresponde con las ecuaciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 5} \\ \boldsymbol{y + z = 10} \\ \boldsymbol{x - 2z = 3} \end{cases}$$

Que resulta ser el Sistema de Cramer buscado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = 11 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = 6 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}} = 4$$

5 Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de k:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y + z = 1} \\ \boldsymbol{x + ay + z = 1} \\ \boldsymbol{x + y + az = -2} \end{cases}$$

Estudiamos en primer lugar el rango de A.

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$. Se anula para a=1 y a= -2

Caso a = 1 rango (A) = 1 (obvio) ; rango (A|B) = 2 por el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= -2 ≠ 0
Sistema incompatible.

Caso a = -2 rango (A) = 2, pues tenemos el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= 3 ≠ 0 y

A|B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ rango (A|B) = 2 pues todos los menores de orden 3 son nulos.

Sistema compatible indeterminado. La solución pasa por buscar el sistema de Cramer equivalente. Para eso nos fijamos en el menor complementario hallado para determinar el rango de A que era $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= 3 ≠ 0 . Las columnas de ese menor se corresponden con las ecuaciones 1ª y 2ª del sistema y las filas se corresponden a las incógnitas x e y. Por tanto prescindimos de la tercera ecuación y la incógnita z pasa a formar parte de los términos independientes. Esto es, llamamos z = α y el sistema de Cramer que buscamos es:

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - \alpha \\ x - 2y = 1 - \alpha \end{cases}$$

Resolviéndolo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1-\alpha & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \alpha - 1 \; ; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-\alpha \\ 1 & 1-\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \alpha - 1 \; : \; z = \alpha$$

Caso a ≠ 1 y a≠ -2 los rangos de A y A|B coinciden y su valor es 3.
El sistema es compatible determinado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{a(a+1)}{(a-1)^2(a+2)}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{(a-1)(a+2)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{(a-1)}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{-2}{(a-1)}$$

6. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} \boldsymbol{3x - ky = 3} \\ \boldsymbol{y + 3z = 6} \\ \boldsymbol{x + kz = 5} \end{cases}$ **para el valor del parámetro k que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de las soluciones en forma paramétrica es x = 1 + 2t , y =…, z = … Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas "y" y "z" que le faltan.**

$\begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$; rango (A) = 2 pues vale el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

A|B = $\begin{pmatrix} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & k & 5 \end{pmatrix}$. Tomamos los menores: $\begin{vmatrix} 3 & -k & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -6k + 12$;

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = 0$. Con lo cual, el rango de A|B es 2 si y solo si k = 2.

El único caso en que el sistema es compatible indeterminado es cuando k =2.

El sistema de Cramer equivalente es el que se obtiene a partir del menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, cuyas filas se corresponden con las ecuaciones segunda y tercera, y las columnas con las incognitas x e y. Prescindimos de la primera ecuación y la incógnita z pasa a formar parte de los términos independientes:

$\begin{cases} y = 6 - 3\alpha \\ x = 5 - 2\alpha \end{cases}$ z = α

Puesto que en la solución hallada x = 1 + 2t ; 1 + 2t = 5 -2 α; de donde $\alpha = 2 - t$
Por tanto y = 6 – 3(2-t) = 3t y z = 2-t

7. Calcular α para que el siguiente sistema homogéneo tenga más soluciones que la trivial. Resolverlo para dicho valor de α y dé una interpretación geométrica del sistema de ecuaciones y de su solución.

$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-z=0} \\ \boldsymbol{2x+y-\alpha z=0} \\ \boldsymbol{x-y-z=0} \end{cases}$ **(Santiago, septiembre 2001)**

En efecto se trata de un sistema homogeno que siempre es compatible. El valor de α buscado es el que nos haga el sistema compatible indeterminado, es decir, rango A <3

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -\alpha \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 3\alpha$. Se anula para α =2. Por tanto el rango en este caso será 2, basta tomar el menor complementario $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= -3 ≠ 0

El sistema de Cramer equivalente es: $\begin{cases} x+2y=t \\ 2x+y=2t \end{cases}$ z = t

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t & 2 \\ 2t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = t\ ; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 0\ :\ z = t$$

A la vista de la solución, para α=2 estamos ante tres planos que se cortan en una recta de ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

8. **¿Es compatible determinado el sistema de ecuaciones** $\begin{cases} \boldsymbol{3x+2z=2} \\ \boldsymbol{5x+2y=1} \\ \boldsymbol{x-2y+4z=3} \end{cases}$ **Justifique la respuesta. Como consecuencia de la respuesta anterior, justifique si tiene una, ninguna o más de una solución este sistema.**

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$=0, por tanto rango(A) =2. Nos vale el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$= 6 ≠ 0

Para averiguar el rango de la ampliada tomamos los menores:

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ rango (A|B) = 2. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado, por lo tanto tiene más de una solución, y en ningún caso es compatible determinado.

9. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según el valor de a y resolverlo en el caso de que sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=a-1} \\ \boldsymbol{ax+2y+z=a} \\ \boldsymbol{x+y+az=1} \end{cases}$$ **(Santiago septiembre 2002)**

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$= -($a$-1)($a$-2). Se anula para a = 1 y para a = 2

Caso a = 1, rango (A) = 2.
Para averiguar el rango de la ampliado tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; rango (A|B) = 3. El sistema es incompatible.

Caso a = 2, rango (A) = 2. Con el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= -1 ≠ 0
Para averiguar el rango de la ampliada tomamos los menores
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ rango (A|B) = 2 . El sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo buscamos el Sistema de Cramer equivalente. El menor elegido en A para determinar rango 2, se corresponde con las dos primeras ecuaciones y las incógnitas y, z. Por tanto x pasa a formar parte del término independiente y prescindimos de la tercera ecuación. El sistema de Cramer equivalente es:

$\begin{cases} y+z=1-\alpha \\ 2y+z=2-2\alpha \end{cases}$ con x = α

$$x=\alpha\,;y=\frac{\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 2-2\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=1-\alpha\ :\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 2 & 2-2\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=0$$

10. Discutir e interpretar geométricamente, según el parámetro a, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x-y=ax} \\ \boldsymbol{5x+y+2z=ay} \\ \boldsymbol{4y+3z=az} \end{cases}$$

(Santiago, septiembre 2003)

$\begin{vmatrix} 3-a & -1 & 0 \\ 5 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{vmatrix} = a(3-a)(a-4)$ Se anula para a = 0, 3, 4

Hay que tener en cuenta que se trata de un sistema homogéneo y por tanto siempre es compatible:
Caso a = 0; Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$= 8 ≠ 0. S.C. indeterminado:

Caso a = 3; Rango (A) =2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. S.C. indeterminado

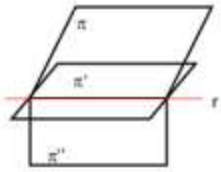
Caso a = 4; Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ S.C. indeterminado

Caso a $\neq$ 0, 3, 4; Rango (A) = 3. S.C.D.

En cuanto a la interpretación geométrica tenemos lo siguiente:

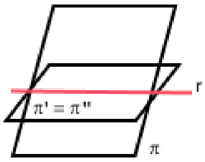
Caso a = 0

$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \\ 4y + 3z = 0 \end{cases}$ Son 3 planos que se cortan en una recta



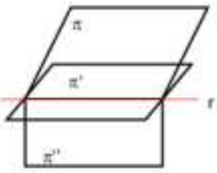
Caso a = 3

$\begin{cases} y = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 2 planos iguales y el tercero cortándolo en una recta



Caso a = 4

$\begin{cases} -x - y = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$ Son 3 planos que se cortan en una recta



Caso a $\neq$ 0, 3, 4.- Son 3 planos que se cortan en un punto

11. Hallar tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, si al doble del primero le restamos seis resulta la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos ocho. (Santiago, junio 2004)

$\begin{cases} x - y = \frac{1}{5}z \\ 2x - 6 = y + z \\ 3y - 2z = x - 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - 5y - z = 0 \\ 2x - y - z = 6 \\ -x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Rango A = 3. Sistema Compatible determinado. Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \\ -8 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = 22 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = 18 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{matrix}} = 20$$

12. Determinar los coeficientes del polinomio de grado dos tal que su gráfica pasa por los puntos (0, 5), (1,7) y (-1,5). ¿Puede haber otro polinomio de segundo grado, que pase por esos tres puntos? Razone la respuesta. (Santiago, septiembre 2004)

Sea el polinomio buscado $ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} c = 5 \\ a + b + c = 7 \\ a + 5b + c = 5 \end{cases}$$ Es un sistema de Cramer pues $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Es un sistema compatible determinado.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = 5/2 \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = 1/2 \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = 5$$

La solución es única por lo tanto no puede haber otra parábola que contenga a esos tres puntos.

13. Discutir e interpretar geométricamente, según los diferentes valores del parámetro m, el siguiente sistema: (Santiago, junio 2005)

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 2z = 2m \\ -3x - 2y + mz = -4 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m + 4$ Se anula para m = 2

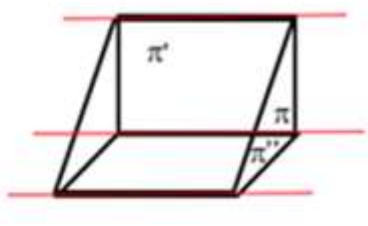
Caso m ≠ 2. Rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado

Solución única y son tres planos que se cortan en un punto.

Caso m = 2. Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$= -2 ≠ 0

Para el estudio del rango de la ampliada, tomemos los menores:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ = 2 rango (A|B) = 3.



Sistema incompatible

Tres planos que se cortan dos a dos en una recta:

14. Discutir e interpretar geométricamente, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x - y + z = 0} \\ \boldsymbol{x - 2y + z = m} \\ \boldsymbol{mx - y + z = 0} \end{cases}$$

Resolverlo si es posible para m = 0 y para m = 2. (Santiago, junio 2006)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2$$

Caso m $\neq$2. Rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado. Se trata de tres planos que se cortan en un punto.

Caso m =2. Rango (A) = 2 Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Para el estudio del rango de la ampliada, tomemos los menores:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

rango (A|B) =2. Sistema compatible indeterminado.

Se trata de dos planos iguales y un tercero cortándolos en una recta.

Vamos a resolverlo para m = 0. Sabemos que el SCD. El sistema es homogéneo, por lo tanto la solución es x = y = z = 0

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Lo resolveremos para m = 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

. Como es SCI, buscamos el Sistema de Cramer equivalente con el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ que se corresponde con las dos primeras ecuaciones y las incógnitas x e y. Prescindimos de la tercera ecuación y la incógnita z pasa a dársele el valor de un parámetro y a formar parte de los términos independientes. De este modo, el sistema de Cramer equivalente es:

$$\begin{matrix} 2x - y = -\alpha \\ x - 2y = 2 - \alpha \end{matrix} \quad \text{con } z = \alpha$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 2-\alpha & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha - 2}{3} \; ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\alpha \\ 1 & 2-\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha - 4}{3} \; : \; z = \alpha$$

Que son las ecuaciones paramétricas de la recta en la que se cortan los tres planos.

15. Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo para m = 0

$$\begin{cases} \boldsymbol{y+mz=0} \\ \boldsymbol{x+mz=0} \\ \boldsymbol{mx-y=m} \end{cases}$$ **(Santiago, septiembre 2006)**

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - m$; Se anula para m = 0 y m = 1

Caso m = 0. Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Para la ampliada, tomamos:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ rango (A|B) = 2.

El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos hallando el sistema de Cramer equivalente que es:

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ z = t. Solución obvia.

Caso m = 1. Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Para la ampliada, tomamos:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ rango (A|B) = 3. Sistema incompatible

Caso m≠0 y m≠1 rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

(Soluciones en la página 51)

***Ejercicio 1*.-**

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} mx+y+z&=0\\ x-my-z&=1\\ 2x+y+z&=0 \end{aligned}$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 2   (Santiago, junio 2007)

***Ejercicio 2*.-**

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x+my+mz&=1\\ x+my+mz&=m\\ my+mz&=4m \end{aligned}$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 1. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 3.-

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuación lineales:

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=m\\ x-2y+z&=2\\ 3x+y+2z&=1 \end{aligned}$$

b) Resuélvelo si es posible, para el caso m = -1   (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 4.-

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuación lineales:

$$\begin{aligned} 3x-y-3z&=m\\ x+y-z&=1\\ mx+3y+2z&=3 \end{aligned}$$

b) Resuélvelo si es posible, para el caso m = 0   (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 5.

a) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z=5\\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$$

b) Calcula el valor de m, para que al añadir al sistema anterior la ecuación:

$$x+2y-z=m$$

resulte un sistema compatible indeterminado.   (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 6.

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x - y + z = 0$$
$$2x - y - z = 0$$
$$x - 2y + 4z = m$$

b) Resolverlo, si es posible, para m = 0 (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 7

a) Discute, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$ax + 2y + 2z = a$$
$$x + y + z = 0$$
$$2x - y + 2z = a$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso a = 0. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 8

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$mx + y - 2z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$x - y + z = m$$

b) Resolverlo, si es posible, en los casos m = 0 y m = -1 (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 9

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$mx - 2y + 2z = 1$$
$$2x + my + z = 2$$
$$x + 3y - z = m$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = -1 (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 10

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$x + my + 3z = 1$$
$$x + 2y + mz = m$$
$$x + 4y + 3z = 1$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 4 (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 11. Dado el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x - 3y + 2z = -4 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que al añadirle la ecuación ax + 3y + z = 9, resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible para a = 0.
b) ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema con estas tres ecuaciones no tenga solución? (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 12

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$x + y = m$$
$$x - my = -13$$
$$3x + 5y = 16$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 2 (Santiago, septiembre 2012)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS:

1) a) Si m =1 el sistema es Incompatible. Si m = 2 el sist. es compatible indeterminado. En caso contrario el sistema es compatible determinado. b) Para m = 2, la solución es: $x = \frac{1-\propto}{5}$ $, y = \frac{3\propto+2}{-5}, z = \propto$
2) a) El sistema es incompatible para todo valor de m excepto para m = 1 que es compatible indeterminado. b) x = -3 , y = 4 – α, z = α.
3) a) Si m = -1, el sistema es compatible indeterminado, si m ≠ -1 es incompatible. b) x = α, y = $\frac{3-\propto}{5}$, z = $\frac{4-7\propto}{5}$
4) a) Si m = -2 el sistema es incompatible, en caso contrario es compatible determinado. b) $x = \frac{5}{8}$, $y = \frac{6}{8}, z = \frac{3}{8}$.
5) a) x = α-3, y = 8, z = α b) m = 13.
6) a) Si m = 0, el sistema es compatible indeterminado. En caso contrario es incompatible. b) x = 2α, y = 3α, z = α
7) a) Si a = 2, el sistema es incompatible. Si a ≠ 2 el sistema es compatible determinado. b) x = 0 , y = 0, z = 0
8) a) Si m = -1 el sistema es incompatible. Si m ≠ -1 sist. compatible determinado. b) x = 0 , y = 0, z = 0, para m = -1 no existe solución.
9) a) Si m = 1, el sistema es compatible indeterminando; si m = -6 es incompatible; en caso contrario es compatible determinado. b) $x = \frac{3}{5}, y = \frac{-2}{5}, z = \frac{2}{5}$.
10) a) Si m = 3 el sistema es incompatible; si m = 4 es compatible indeterminado; en caso contrario es incompatible. b) $x = 7 - 5\alpha$ $, y = \frac{\alpha-3}{2}, z = \alpha$
11) a) No existe valor de a que haga compatible indeterminado el sistema. Para a = 0, la solución es x = -22 , y = 0, z = 9. b) $\frac{-2}{5}$.
12) a) Si m = 2 o m = 5/3 el sist. es compatible determinado; en caso contrario es incompatible. b) x = -3, y = 5.

TEMA III

EL ESPACIO VECTORIAL V3

VECTORES EN EL ESPACIO.

Definición.- Sea E_3 el espacio intuitivo formado por puntos. Se define **vector fijo** de extremos A y B, al segmento orientado **AB**.
Denominamos modulo de **AB**, al valor |**AB**| que determina la longitud del segmento (previa determinación de una unidad de medida).
Dirección de **AB** es la recta que contiene al segmento AB y todas sus paralelas.
Sentido de **AB** indica donde comienza el vector (A punto origen) y donde finaliza (B punto extremo).
El vector se simboliza gráficamente mediante una flecha, cuya punta indica el punto extremo.

Todos los vectores citados en este trabajo, se indicarán mediante letra negrita. Otros textos lo designan con una flecha encima. Por economía de escritura omitiremos esta notación.

Definición.- Sea el conjunto de vectores fijos del espacio E_3. Definimos la siguiente relación:

AB es equipolente a **CD** si y solo si:
- **AB** y **CD** tienen el mismo módulo
- **AB** y **CD** tienen la misma dirección
- **AB** y **CD** tienen el mismo sentido

Esta relación es de equivalencia, y clasifica al conjunto de vectores fijos en clases de equivalencia (todos los vectores equipolentes entre sí), denominadas ***vectores libres***.
El conjunto de vectores libres en el espacio se representa por V3

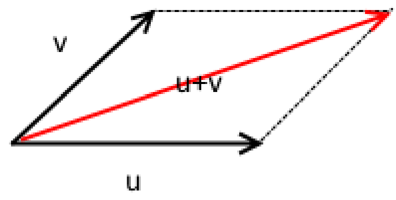
Así pues, un vector libre es un conjunto infinito de vectores fijos que tienen todos las tres características (módulo, dirección y sentido) iguales. A la hora de trabajar con ellos, se elige un representante de dicho conjunto, independientemente de donde este su posición absoluta en el espacio como vector fijo. Este hecho le permite *moverse libremente* por el espacio (basta cambiar el representante), de ahí su denominación.

A partir de ahora, siempre que nos refiramos a un vector, será un vector libre, salvo que se indique lo contrario.

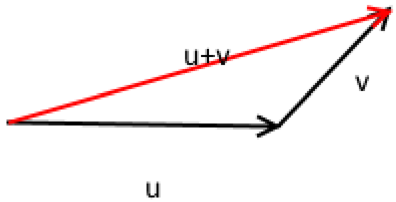
Operaciones con vectores:
Suma
Dados **u, v** $\in$ V3

Se define **u + v** como un nuevo vector de V3. Gráficamente la suma se resuelve así:

a) Si **u** y **v** tienen el mismo punto origen (método del paralelogramo)



si **v** está a continuación de **u** (la suma es el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo)



Propiedades de la suma:

1) Commutativa **u**+**v** = **v**+**u**, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V3$
2) Asociativa (**u**+**v**)+**w** = **u**+(**v**+**w**); $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V3$
3) Elemento neutro **0**; **u**+**0**=**u**. $\forall$**u** $\in V3$. El vector nulo **0** es el representante de los fijos que tienen el mismo origen y el mismo extremo.
4) Elemento opuesto de **u**, **-u** / **u**+(-**u**) = **0**; $\forall$**u** $\in V3$ el vector opuesto –**u**, difiere del vector **u**, solamente en el sentido que son opuestos. (la dirección y el módulo coinciden)

Producto por escalares.

Sea **u** $\in V3$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos $\boldsymbol{\lambda}.\mathbf{u}$ como un nuevo vector de V3, caracterizado por tener la misma dirección de **u**; el sentido de **u** se conserva si λ es positivo y es de sentido opuesto al de **u** si λ es negativo. El módulo se modifica en función del valor absoluto de λ. (Gráficamente **u** se expande o se contrae en un sentido u otro).

Propiedades de la suma y el producto escalar combinadas:

1) $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$
2) $(\lambda+\lambda')\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}+\lambda'\mathbf{u}$ $\quad\forall\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}; \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathrm{V3}$
3) $(\lambda.\lambda')\mathbf{u} = \lambda(\lambda'\mathbf{u})$
4) 1.**u** = **u**

V3 con la suma y el producto por escalares tiene estructura de *Espacio Vectorial.*

Combinación lineal de vectores

Sean $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, **…** $\mathbf{u_n}$ vectores libres de V3. Se llama combinación lineal de los n vectores a la expresión siguiente:

$$\mathrm{a}_1\mathbf{u_1}+\mathrm{a}_2\mathbf{u_2}+\mathrm{a}_3\mathbf{u_3}+\ldots+a_n\boldsymbol{u_n} \qquad \text{donde } \mathrm{a_i} \in \mathbb{R}, \text{ con } i=1\ldots n$$

Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \ldots \mathbf{u_n}$ vectores libres de V3, se dice que son linealmente independientes si $a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + a_3\mathbf{u_3} + \ldots + a_n\boldsymbol{u_n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_i = 0\ \forall i = 1 \ldots n$

Sistema de generadores

Sea $\mathcal{S} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \ldots \mathbf{u_n}\}$ vectores libres de V3. Se dice que $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de V3, si para cualquier vector **v**, este se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{S}$.

Base del espacio vectorial V3

Se llama base de V3 a un conjunto de vectores de V3 que sean simultáneamente linealmente independientes y sistema de generados.

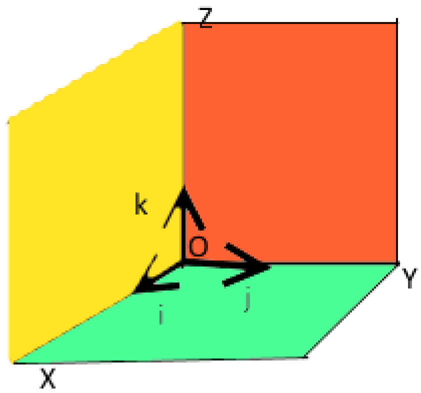
Sistema de referencia en el espacio E3

Se llama sistema de referencia ortonormal, al conjunto $\mathfrak{R}\ (0, B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\})$, donde O es un punto llamado origen y B es una base de V3.

Sistema de referencia ortonormal

Se llama así al conjunto $\mathfrak{R}\ (0, B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\}$ de modo que $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}| = 1$ y $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{j}$. orto (perpendiculares entre sí) normales (de módulo 1 o unitarios).

El sistema de referencia ortonormal genera es sistema de ejes cartesianos tridimensional:



Coordenadas de un punto en un espacio de referencia ortonormal.

Sea el punto A en el espacio. Llamamos vector de posición del punto A, al vector **OA.** **Como** $B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\}$, es base, los vectores constituyen un sistema de generadores, lo cual quiere decir que el vector **OA** puede escribirse en combinación lineal de **i, j** y **k**, esto es:

$$\mathbf{OA} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \text{siendo } a_i \in \mathbb{R}$$

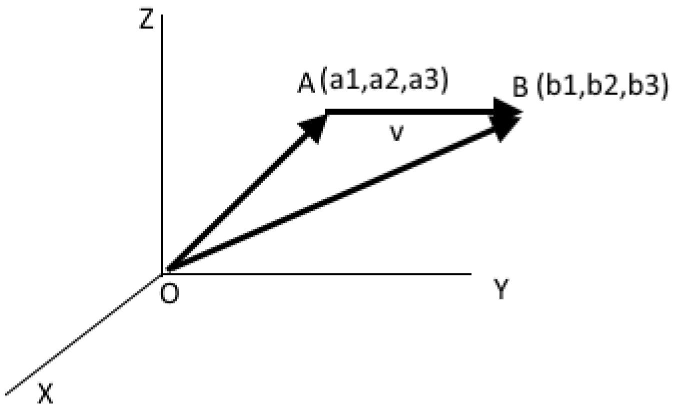
Veamos que esta expresión es única para **OA**.

Supongamos que **OA** = $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

Restando miembro a miembro ambas expresiones, resulta que $\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k}$. Puesto que **i, j** y **k** son linealmente independientes por ser base, los escalares han de ser 0 : $a_1 - b_1 = 0;\ a_2 - b_2 = 0; a_3 - b_3 = 0$ con lo que $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$. Esto nos demuestra que la expresión es única.
Esta unicidad me permite asociar de forma unívoca el vector **OA** con la terna (a_1, a_2, a_3) que serán las coordenadas del punto A en el sistema de referencia ortonormal.

Componentes de un vector libre **v** *en un sistema de referencia ortonormal.*

Sea el vector libre *v* de representante AB, siendo A un punto de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y B el punto extremo de coordenadas (b_1, b_2, b_3). Según las leyes de la suma de vectores, **OA + AB = OB**; de donde
AB = OB – OA = $(b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$[3] que son las componentes del vector **v**.



Podemos definir la suma de vectores y el producto por escalares en función de sus componentes, esto es:

Suma:
$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ **que para abreviar identificamos con** (u_1, u_2, u_3)
$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ **que para abreviar identificamos con** (v_1, v_2, v_3)

u+v = $(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j} + (u_3 - v_3)\mathbf{k}$ **que identificamos con** $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Producto por escalares: Análogamente se demuestra que :

$\boldsymbol{\lambda}.\mathbf{u} = (\boldsymbol{\lambda}\, u_1, \boldsymbol{\lambda}\, u_2, \boldsymbol{\lambda}\, u_3)$

[3] Definir (b1, b2, b3) - (a1, a2, a3) = (b1- a1, b2- a2, b3- a3), procede de que **OB**=$b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, $\mathbf{OA} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, por tanto **OB-OA** = (b1- a1)**i** +(b2- a2)**j** +(b3- a3)**k**

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dados **u, v** ∈ V3. Se llama producto escalar de los vectores dados al siguiente valor:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Obsérvese que el producto escalar no obtiene un vector sino un escalar, de ahí su nombre.

Propiedades del producto escalar:

1) Commutativa $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$
2) Distributiva respecto a la suma $\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$
3) Asociativa respecto al producto por escalares: $k.(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (k.\mathbf{u}).\mathbf{v}$
4) Si **u** y **v** son perpendiculares, entonces $\mathbf{u}.\mathbf{v}=0$ (La demostración es trivial aplicando la definición)
5) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}}$

Expresión del producto escalar en un sistema de referencia ortonormal:

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}).(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) =$

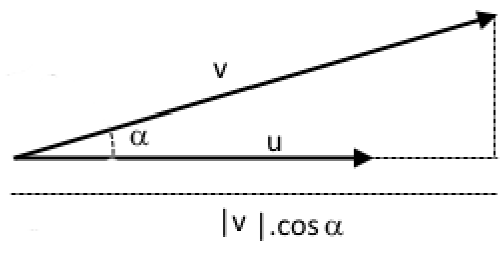
$(u_1.v_1)\mathbf{i}.\mathbf{i} + (u_1.v_2)\mathbf{i}.\mathbf{j} + (u_1.v_3)\mathbf{i}.\mathbf{k} + (u_2.v_1)\mathbf{j}.\mathbf{i} + (u_2.v_2)\mathbf{j}.\mathbf{j} + (u_2.v_3)\mathbf{j}.\mathbf{k} + (u_3.v_1)\mathbf{k}.\mathbf{i} + (u_3.v_2)\mathbf{k}.\mathbf{j} + (u_3.v_3)\mathbf{k}.\mathbf{k}$,

Ahora bien $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{i}.\mathbf{k} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0$, mientras que $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$

Con lo que $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_1.v_1)\mathbf{i}.\mathbf{i} + (u_2.v_2)\mathbf{j}.\mathbf{j} + (u_3.v_3)\mathbf{k}.\mathbf{k} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

Interpretación geométrica del producto escalar:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \cos \alpha$$



Obsérvese que el producto escalar es el producto del módulo de un vector por la proyección del otro vector sobre el primero.

Módulo de un vector en función de sus componentes en un sistema ortonormal.

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, es decir de componentes $(u_1,\ u_2,\ u_3)$

$\mathbf{u}.\mathbf{u}$ = $|\mathbf{u}|.|\mathbf{u}|$ cos 0º = $|\mathbf{u}|^2$; de donde $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}}$.

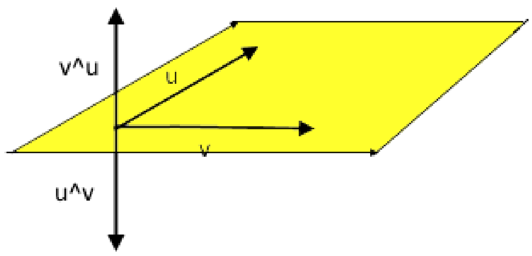
Por otra parte $\mathbf{u}.\mathbf{u} = u_1.u_1 + u_2.u_2 + u_3u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

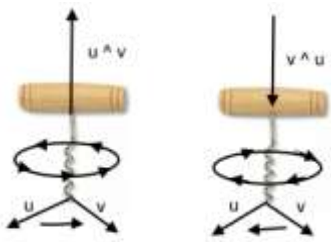
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u}_1^2 + \boldsymbol{u}_2^2 + \boldsymbol{u}_3^2}$$

PRODUCTO VECTORIAL

Dados **u, v** ∈ V3. Se llama producto vectorial de los vectores dados, al vector que denotaremos por **u^v** con las siguientes características:

a) Módulo: | **u^v** |= |**u**|.|**v**| sen (áng(**u**, **v**))
b) Dirección: La dirección vendrá determinada por la *perpendicular común* a ambos vectores.
c) Sentido: el sentido vendrá determinado por *la regla del sacacorchos (o tapón de rosca)*





Propiedades del producto vectorial:

1) Anticommutativa **u^v= -v^u**
2) Distributiva respecto a la suma **u^(v+w) = u^v + u^w**
3) Asociativa respecto al producto por escalares: k.(**u^v) =** (k.**u**)^**v = u**^(k.**v)**
4) Si **u** y **v** tienen la misma dirección, entonces **u^v=**0 (La demostración es trivial aplicando la definición)

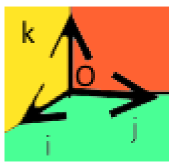
Expresión del producto vectorial en un sistema de referencia ortonormal:

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

u^v = $(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})$^$(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})$ =

$(u_1.v_1)$**i^i** + $(u_1.v_2)$**i^j** + $(u_1.v_3)$**i^k** + $(u_2.v_1)$**j^i** + $(u_2.v_2)$**j^j** + $(u_2.v_3)$**j^k** + $(u_3.v_1)$**k^i** + $(u_3.v_2)$**k^j** + $(u_3.v_3)$**k^k,**

Ahora bien **i^j = k ; i^k = j; j^k=i** mientras que **i^i = j^j = k^k** = 0



u^v = $(u_1.v_2)$**i^j** + $(u_1.v_3)$**i^k** + $(u_2.v_1)$**j^i** + $(u_2.v_3)$**j^k** + $(u_3.v_1)$**k^i** + $(u_3.v_2)$**k^j** = $(u_1.v_2)$**k** + $(u_1.v_3)$**j** - $(u_2.v_1)$**k** + $(u_2.v_3)$**i** - $(u_3.v_1)$**j** - $(u_3.v_2)$**i** =

$(u_2.v_3 - u_3.v_2)\mathbf{i} - (u_3.v_1 – u_1.v_3)\mathbf{j}+(u_1.v_2 - u_2.v_1)\mathbf{k}$

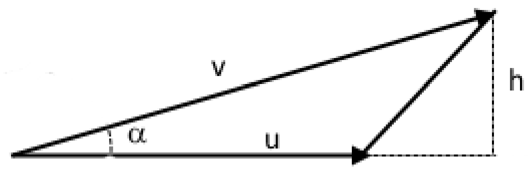
Esta expresión es el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica del producto vectorial:

Puesto que

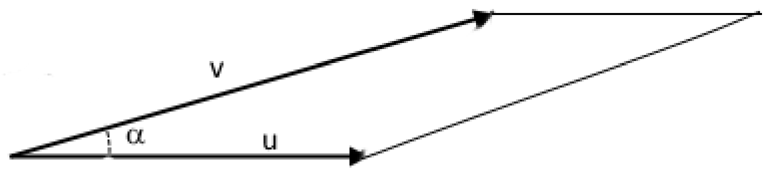
$$|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \text{ sen } \alpha$$



El área del triángulo formado por **u** y **v** es $\frac{|\mathbf{u}|.h}{2}$. Ahora bien, $h = |\mathbf{v}|.\text{sen}\alpha$

Por tanto Área = $\frac{|\mathbf{u}|.|v|.\text{sen}\alpha}{2}$, $\qquad |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\text{sen}\alpha = 2.\text{Área}$

Por lo tanto, el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **v**.



PRODUCTO MIXTO

Sean **u, v, w** tres vectores libres de V3. Se define el producto mixto, que representaremos por [**u, v, w**] al producto escalar de **u**. por el vector **v^w**

[**u, v, w**] = **u.**(**v^w**). Obviamente el resultado es un escalar.

Si **u, v** y **w** están referidos a un sistema de referencia ortonormal, el producto mixto viene dado por el determinante de la matriz configurada con **u**, **v** y **w**.

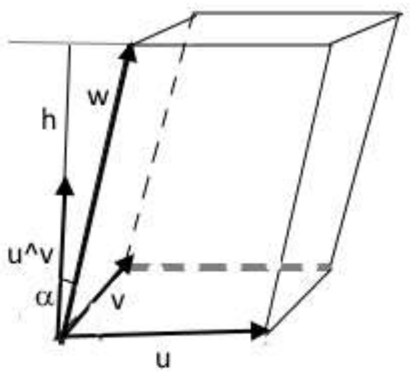
Algunas propiedades del producto mixto:

1) [**u, v, w**] = -[**v, u, w**] = [**v, w, u**] = -[**w, v, u**]=…
2) [**u, u, w**] = 0
3) Si **u** y **v** son linealmente dependientes [**u, v, w**] = 0

El producto mixto tiene las propiedades vistas para los determinantes.

Interpretación geométrica del producto mixto

|**u** ^**v**| area del paralelogramo. Entonces |**u**^**v**|.h es el volumen del paralepipedo. Pero h es |**w**|.cos α.



El volumen del paralepipedo es

|**w**|.|**u**^**v**| cos $\angle(\mathbf{w}, \mathbf{u}\,\hat{}\,\mathbf{v})$ Esta es la definición del productor escalar. de **w.(u^v)**

En consecuencia, el valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralepípedo determinado por los tres vectores **u, v, w**.

El volumen del tetraedro (prisma triangular) formado por los tres vectores es 1/6 del producto mixto.

Cálculo del punto medio entre dos dados:

Dados A(a_1, a_2, a_3) B (b_1, b_2, b_3). El punto medio $M = \frac{\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}}{2} = \frac{(a1+b1,a2+b2,a3+b3)}{2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentra un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas (1,0,1) y (1,2,0)

SOLUCIÓN:

Primero hallaremos el vector ortogonal a los dos vectores. Esto se obtiene calculando el producto vectorial de ambos, es decir:

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2i + j + 2k$, es decir el vector (-2,1,2).

Un vector se reduce a módulo 1, dividiendo sus componentes por su módulo.

|(-2,1,2)| = $\sqrt{9}$ = 3. El vector pedido es $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. Determina el valor de a para que los puntos A = (1,0,1), B =(1,1,1) y C = (1,6,a) sean los tres vértices de un triángulo de área 3/2.

SOLUCIÓN:

Por la interpretación geométrica del producto vectorial, sabemos que su módulo es el área del paralelogramo que forman los vectores **AB** y **AC**. Por tanto el área del triángulo es la mitad del módulo.

AB = (0, 1, 0) **AC** = (0, 6, a-1)

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)i$ esto es, **AB^AC** = (a-1, 0, 0)

$\frac{3}{2} = \frac{|\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC}|}{2}$; $3 = \sqrt{(a-1)^2}$; a – 1 = ±3 ; a = 4 o ; a = -2

3. Dados los vectores u = (1, 2, 0) y v = (0,1,2), calcula

a) El producto vectorial de u y v.

b) Un vector unitario ortogonal a u y a v

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores u y v.

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 2j + k \qquad (4, -2, 1)$$

b) | **u** ^ **v**| = $\sqrt{21}$ $\left(\frac{4}{\sqrt{21}} \quad \frac{-2}{\sqrt{21}} \quad \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

c) Área del paralelogramo = $\sqrt{21}$

4. Calcula los valores de x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2. 0 , -1)

SOLUCIÓN:

Hacemos el producto vectorial: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 3j - 4k$ (-2, 3, -4)

(x, y, 1) y (-2, 3, -4) son linealmente dependientes entonces x/-2 = y/3 = 1 /-4; de donde x = ½ y = -3/4

5. Dados los puntos A = (1,0,1), B = (1,1,1) y C = (1,6, p). Determinar los valores de p para que los tres puntos anteriores estén alineados. ¿Existe algún p para el cual los puntos A, B y C sean los tres vértices consecutivos de un paralelogramo de área 3.

SOLUCIÓN:

Para que A, B y C estén alineados, los vectores AB y BC tienen que tener la misma dirección, es decir ser dependientes **AB**=(0, 1, 0) **BC** = (0, 5, p-1)

Rango $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & p-1 \end{pmatrix}$=1 ,entonces p-1 = 0. p = 1.

Para que A, B y C sean los tres vértices consecutivos de un paralelogramo de area 3

BA = (0 , -1, 0) y **BC** = (0 ,5, p-1) **BA^BC** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & p-1 \end{vmatrix} = (1-p)i$

Cuyo módulo es 1- p = 3, p = -2.

6. Sean u y v dos vectores. Comprobar que si (u + v) (u – v) = 0, entonces |u| = |v|

Calcular los vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores u (-3, 4, 1) y v = (-2,1,0). (Santiago, Septiembre 2001)

SOLUCIÓN

(u + v) (u – v) = u.u – vv = |u|^2 - |v|^2 = 0; |u|^2 = |v|^2 entonces |u| = |v|

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j + 5k$ (-1, -2, 5). Su módulo es $\sqrt{30}$

Los vectores unitarios pedidos son: $\left(\frac{-1}{\sqrt{30}} \quad \frac{-2}{\sqrt{30}} \quad \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{30}} \quad \frac{2}{\sqrt{30}} \quad \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$

7. Determinar los vectores unitarios v (a, b, c) (con a>0, b>0, c>0), que forman un ángulo de π/6 radianes con el vector u (1, 1, 1) y un ángulo de π/4 radianes con w: (2,0,2) (Santiago junio 2002)

SOLUCIÓN

Haciendo los productos escalares, tenemos:

a + b + c = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{3}\cos 30º = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ = 1/2

2a + 2c = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{8}\cos 45º = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{8}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Es un sistema de múltiples soluciones y resuelvo c = t, a = $\frac{\sqrt{2}-2t}{2}$, b = $\frac{1-\sqrt{2}-3t}{2}$,

$$0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. Dados los vectores u (-2, 0, 4) y v (-1, 0, a). ¿Para qué valores de a el módulo del vector (u + v)^(u-v) vale 4? (Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:

u + v = (-3, 0, 4+a) u – v = (-1, 0, 4-a) (u + v)^(u-v)= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 4+a \\ -1 & 0 & 4-a \end{vmatrix}$ =
$(3(4-a)-(4+a), 0, 0)$ = (8-4a, 0, 0)
|(u + v)^(u-v)| = 8 – 4a = 4. De ahí se desprende que a = 1.

9. Determinar los valores de a y b, a>0, para que los vectores u (a, b, b), v (b, a, b) y w (b, b, a) sean unitarios y ortogonales dos a dos. (Santiago, junio 2003)

Si son unitarios los módulos valen 1, es decir $\sqrt{a^2+2b^2} = 1$ en los tres casos, entonces

$$a^2 + 2b^2 = 1$$

Si u $\perp v$ u.v = 0 : $2ab+b^2 = 0$ Si u $\perp w$ u.w = 0 : $2ab+b^2 = 0$ Si v$\perp w$ v.w = 0 : $2ab+b^2=0$, de aquí $a = \frac{-b^2}{2b} = \frac{-b}{2}$; sustituyendo en $a^2 + 2b^2 = 1$ tenemos que $\frac{b^2}{4} + 2b^2=1$; $9b^2 = 4$. $b = \frac{-2}{3}$. $a = \frac{1}{3}$

Los vectores son u $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$ v $(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$ w $(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$

10. Dados los vectores $u_1(1, 2, 1)$, $u_2(1, 3, 2)$, $v_1(1, 1, 0)$, $v_2(3, 8, 5)$. Demostrar que u_1 y u_2 dependen linealmente de v_1 y v_2. (Santiago, septiembre 2003)

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2$. Esto quiere decir que u_1 y u_2 son linealmente independientes.

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 2$ Tomemos los menores $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Esto quiere decir que u_1 y u_2 dependen linealmente de v_1 y v_2

EJERCICIOS PROPUESTOS

(soluciones en la página 66)

Ejercicio 1. Sean **u**, **v** dos vectores tales que |**u**| = 3, |**v**|=4. |**u-v**| = 5. Calcula el ángulo que forman los vectores **u** y **v**. Calcula el producto mixto [**u, v, u**^**v**], siendo **u**x**v** el producto vectorial de **u** y **v**. (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 2. Sean **v,w** dos vectores tales que |**v**| = 6, |**w**|=10. |**w+v**| = 14. Calcula el ángulo que forman los vectores **w** y **v**. (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores **u** (3, 7, -6) y **v** (4, 1, -2)

Ejercicio 4. Comprueba que cualquiera de los vectores **a** (1, 2, 3), **b** (2, 1, 3) y **c** (1, 0, 1) puede expresarse como combinación lineal de los otros dos.

Ejercicio 5. Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes. (2, 3, 4), (-1, 2, 6), (m, n, 0)

Ejercicio 6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?
A = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}; B = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)}

Ejercicio 7. En una base ortonormal tenemos **a** (1, 2, 2) y **b** (-4, 5, -3). Calcula a) **a.b**; b) |**a**| y |**b**| c) el ángulo que forman **a** y **b** d) el vector proyección de **b** sobre **a**.

Ejercicio 8. Dados los vectores **a** = **i**+m**j**+**k** y **b** = -2**i**+4**j**+m**k**, halla m para que los vectores **a** y **b** sean a) paralelos, b) perpendiculares

Ejercicio 9. Halla el vector proyección del vector **u**(3, 1,2) sobre el vector **v**(1, -1, 2)

Ejercicio 10. Halla el área del paralelogramo que forman los vectores **a**(7, -1, 2) y **b**(1, 4, -2)

Ejercicio 11. Halla un vector ortogonal a **u**(1, -1,0) y **v**(2, 0, 1) cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

Ejercicio 12. Calcula el volumen del paralepípedo determinado por los tres vectores **u** (1, -3, 2) **v** (1, 0, -1) **w** (2, 3, 0)

Ejercicio 13. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores **a** (3, -1, 1), **b** (1, 7, 2) y **c** (2, 1, -4)

Ejercicio 14. Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores **u** (3, -2,1) y **v** (4, 3, -6) es un rectángulo.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1) 90º; 144.
2) 60º.
3) $\frac{\sqrt{1013}}{2}\ u^2$
4) Rango (a, b, c) = 2. Son l. dep.
5) m y n han de ser tales que 5m – 3n = 0.
6) B.
7) a) 0. b) 3, $5\sqrt{2}$ c) 90º d) vector **0.**
8) a) -2. b) $\frac{2}{5}$.
9) $\left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\right)$
10) $\sqrt{1133}\ u^2$.
11) (−2, -2, 4).
12) 15 u^3.
13) 111/6 u^3.
14) En efecto, puesto que u.v = 0, por lo que son perpendiculares.

TEMA IV

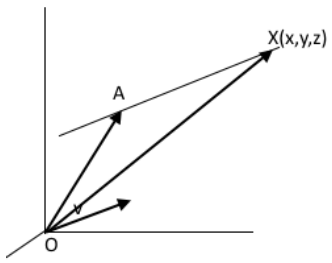
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

Ecuaciones de la recta en el espacio.

En todo momento trabajaremos sobre un sistema de referencia ortonormal $\mathfrak{R}\ (0, B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\}$.

Para determinar una recta en el espacio, de forma única, necesitamos un punto por el que pasa y una dirección (que nos la dará un vector libre).

Estos dos elementos serán el punto A de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y un vector **v** de componentes (v_1, v_2, v_3).



Sea X(x,y,z) un punto genérico de la recta que pasa por A y tiene por dirección v.

Se observa que **OA+AX**=**OX**, **AX** está en la dirección de **v**, por tanto **AX**=λ.**v**

OX = **OA** + λ.**v.** Escribiendo las componentes

(x,y,z) = (a_1, a_2, a_3) + λ.(v_1, v_2, v_3) que es la ecuación vectorial de la recta.

Desarrollando por componentes individuales tenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

llamadas ecuaciones paramétricas, siendo λ el parámetro que al variar va obteniendo los distintos puntos de la recta.

Como el valor del parámetro λ ha de ser el mismo para cada punto, al ser despejado en las paramétricas e igualando, obtenemos:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

que son las ecuaciones continuas.

Desarrollando las dos igualdades, obtenemos dos ecuaciones que conforman las ecuaciones implícitas o cartesianas.

Ejemplo: Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y tiene como vector dirección **v** (-1, 4, 3).

Vectorial.- $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda.(-1, 4, 3)$

Paramétricas.- $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ Continuas.- $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$

Implícitas o generales: $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$ Se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado para poder generar infinitas soluciones (puntos de la recta).

Para pasar de implícitas a paramétricas, basta resolver el sistema, dando el valor del parámetro a la incógnita adecuada.

Otra forma de determinar de forma única una recta en el espacio es la presencia de dos puntos P y Q, la cuestión se reduce a la anterior, tomando como punto cualquiera de ellos y como vector dirección **PQ** o **QP.**

En el espacio no existe la ecuación punto-pendiente, al no caracterizar la pendiente una recta de forma unívoca.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio:

Sean r y s, dos rectas en el espacio, determinadas respectivamente por los puntos P, Q y los vectores directores **u** y **v**.

Consideremos la matriz por filas o columnas de los vectores **PQ, u** y **v**, y estudiemos el rango.

a) Si rango (**PQ,u,v**) = 1, las rectas son coincidentes.
b) Si rango (**PQ,u,v**) = 2 $\begin{cases} \text{paralelas si rango}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 \\ \text{se cortan en un punto si rango}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \end{cases}$.
c) Si rango (**PQ, u, v**) = 3, las rectas se cruzan sin cortarse.

También puede hacerse estudiando el sistema de ecuaciones que se determinan al igualar sus ecuaciones paramétricas.

Veamos un ejemplo y utilicemos los dos sistemas:

Sea r: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ $y \quad s \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 10 + \alpha \\ z = 9 - \alpha \end{cases}$

Siempre que estemos estudiando dos o más rectas en el mismo ejercicio, deben denominarse los parámetros con una expresión distinta para evitar confusiones.

Los elementos de r son P(1,2,3) y **u**(-1,4,3); los de s son Q(-1,10,9) y v (-2,1,-1)

Establecemos el vector **PQ** (-2,8,6).

Lo primero que debemos establecer es si existen dependencia lineal entre **u** y **v**. Para ello estudiamos el rango de $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ que es 2. Por tanto descartamos el paralelismo y la igualdad.

Estamos en el caso de que se cortan o se cruzan. Eso lo determinará el rango de

$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Su determinante es 0. Por tanto el rango es 2. Las rectas se cortan en un punto.

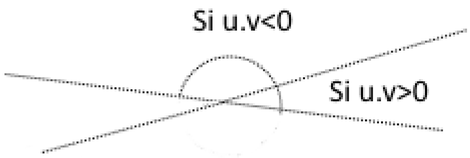
¿Cómo hallamos el punto de corte?. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones:

$\begin{matrix} 1-\lambda=-1-2\alpha \\ 2+4\lambda=10+\alpha \\ 3+3\lambda=9-\alpha \end{matrix}$ con incógnitas α y λ , es decir: $\begin{matrix} 2\alpha-\lambda=-2 \\ -\alpha+4\lambda=8 \\ \alpha+3\lambda=6 \end{matrix}$

Ya sabemos por el estudio previo anterior que ese sistema ha de ser compatible determinado. Así que el sistema de Cramer equivalente será

$\begin{matrix} 2\alpha-\lambda=-2 \\ -\alpha+4\lambda=8 \end{matrix}$ que al resolverlo se obtiene α = 0; λ=2. El punto de corte es (-1, 10, 9)

Ángulo que forman dos rectas.



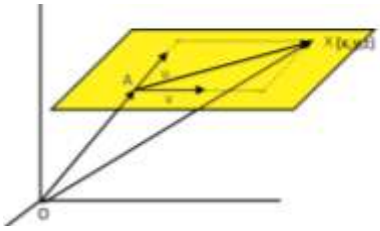
Para averiguar el ángulo que forman dos rectas, solamente tenemos que averiguar el ángulo que forman los vectores directores. Si **u** y **v** son los vectores directores de las rectas.

Cos (**u, v**) $=\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$, el ángulo buscado será arccos $\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ **.** Si el valor del cociente es positivo, el ángulo es el agudo. Si el valor del cociente es negativo, el ángulo es el suplementario del agudo.

En caso de que se crucen, el ángulo es el que determina la recta r con la proyección de la recta s, sobre r.

Ecuaciones del plano en el espacio

Para determinar un plano en el espacio, de forma única, necesitamos un punto por el que pasa y dos vectores linealmente independientes.
Estos dos elementos serán el punto A de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y los vectores **u**(u_1, u_2, u_3) y **v** (v_1, v_2, v_3). De forma que rango (**u,v**) = 2



Sea X(x,y,z) un punto genérico del plano que pasa por A.

Se observa que **OA**+**AX**=**OX**, **AX**=α.**u**+β**v**

OX = **OA** + α.**u**+β**v.** Escribiendo las componentes

(x,y,z) = (a_1, a_2, a_3) + α.(u_1, u_2, u_3)+ β.(v_1, v_2, v_3)

que es la ecuación vectorial del plano.

Desarrollando por componentes individuales tenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}$$

llamadas ecuaciones paramétricas, siendo α y β los parámetro que al variar van generando los distintos puntos del plano.

Si consideramos las ecuaciones paramétricas como un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $\alpha\ y\ \beta$, el sistema ha de ser compatible indeterminado (tiene que tener infinitas soluciones, tantas como puntos tiene el plano). Entonces los rangos de la matriz principal y ampliada tendrían que coincidir, es decir:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2 = \text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de vectores es 2 por elección de dichos vectores en la definición del plano.

Esto obliga a que $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{vmatrix} = 0$ o indistintamente $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando este determinante, obtenemos la ecuación

$Ax + By + Cz + D = 0$ que es la llamada ecuación implícita o cartesiana del plano.

Es importante observar que el vector formado por los coeficientes (A, B, C) es un vector normal (perpendicular) al plano, que representaremos por **n**

En efecto, desarrollando $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$, se obtiene:

$(x-a_1)\,(u_2v_3-u_3v_2) - (y-a_2)(u_1v_3-u_3v_1) + (z-a_3)(u_1v_2-u_2v_1)$

$\mathbf{n} = (A, B, C) = (u_2v_3-u_3v_2, -u_1v_3+u_3v_1, u_1v_2-u_2v_1) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

Recordemos que **u^v** es un vector perpendicular a **u** y **v**, por tanto es perpendicular al plano que determinan.

Este resultado nos permite definir un plano de forma única, dando un punto y el vector normal.

Otra forma de determinar un plano de forma única, es dando tres puntos no alineados P, Q, R. El problema se reduce a un punto (cualquiera de ellos) y dos vectores (**PQ** y **PR** por ejemplo que al no estar P, Q y R alienados, son linealmente independientes.)

Ejemplo 1: Escribir las ecuaciones del plano que pasa por P(1,1,3) y tiene como dirección, los vectores **u** (2.-1,2) y **v**(3,1,1)

Vectorial (x,y,z) = (1,1,3)+α(2.-1,2)+β(3,1,1)

$$\text{Paramétricas} \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 - \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

Implícita: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, (x-1).(-3) – (y-1)(-4) + (z-3)5 = 0

$$-3x+4y+5z-16 = 0$$

El vector normal es (-3,4,5)

Ejemplo 2: Escribe las ecuaciones del plano que pasa por P(1,0,2) y su vector normal es **n**(2,5,7)

La implícita es 2x + 5y + 7z + D = 0. Para hallar D, sustituimos P en x, y,z. resultando:

2+14+D = 0; D = -16. La ecuación implícita es: 2x + 5y + 7z -16 = 0

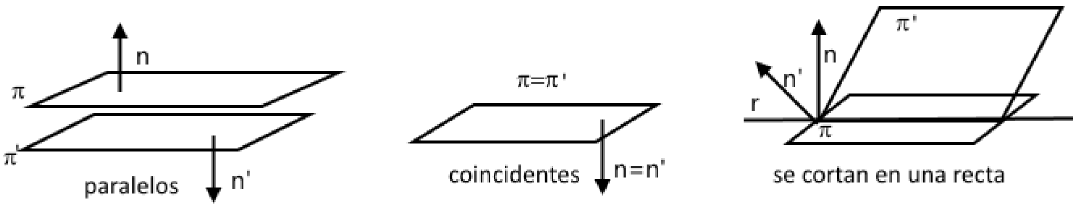
Las paramétricas: Hacemos y = α ; z = β ; y despejamos x

$x = \dfrac{16-5\alpha-7\beta}{2} = 8 - \frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}\beta$ Paramétricas $\begin{cases} x = 8 - \frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$

Los vectores que dirigen el plano son (-5/2, 1, 0) y (-7/2, 0,1) Como nos importan por la dirección, podemos simplificarlos[4] de forma que sus componentes sean enteras. Multiplicamos por 2 y obtenemos los vectores (-5, 2,0) y (-7,0,2)

Ecuación vectorial: (x,y,z) = (1,0,2) + α(-5, 2,0) + β(-7,0,2)

Posición relativa de dos planos en el espacio.



$$Sean\ \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad y \quad \pi': A'x + B'y + C'z + D` = 0$$

[4] Este proceso de simplificación de vectores dirección también es válido en el caso del vector director de la recta. Nunca puede hacerse esta simplificación cuando se trata de puntos.

a) si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ son coincidentes. Rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1$

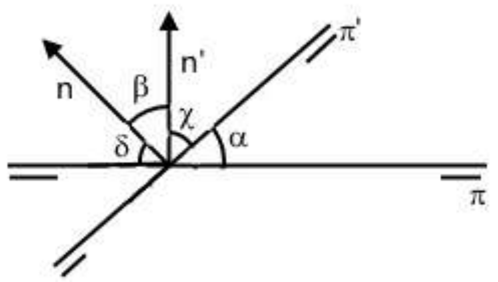
b) si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ son paralelos.

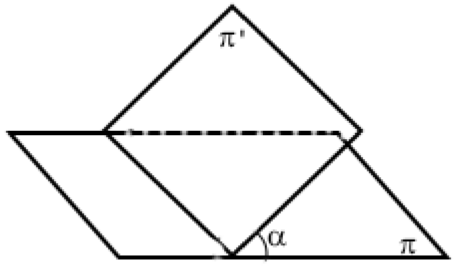
Rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2$ y rango $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$

c) si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ se cortan en una recta

rango $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$

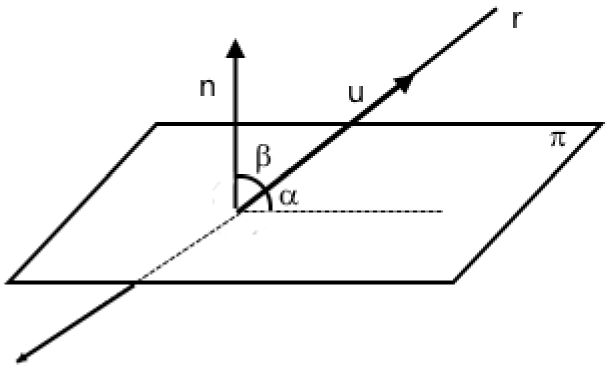
Ángulo formado por dos planos. Si β es el ángulo formado por los vectores normales, tenemos:





α+χ=90 ; β+χ=90 α−β=0 α = β

El ángulo formado por dos planos es el ángulo formado por sus vectores normales.



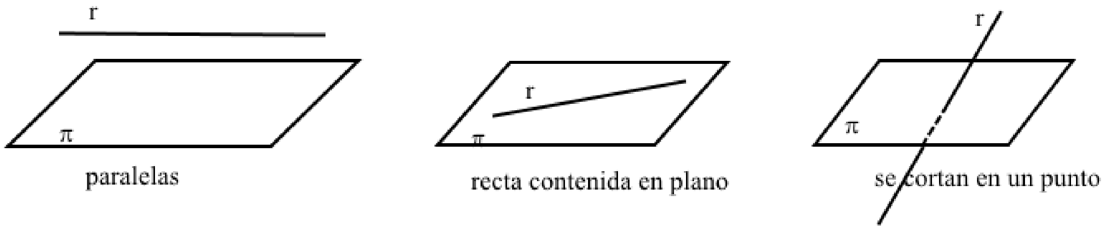
Ángulo formado por recta y plano

El ángulo formado por la recta y el plano es α, pero podemos comprobar que es el complementario de β, cuyo coseno puede ser calculado por el producto escalar de n por u.

Por complementariedad sen α = cos β

sen α = $\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$; α = arcsen $\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$

Posición relativa entre recta y plano:



Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones implíticas de la recta con la ecuación implícita del plano. Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Puede producirse: a) Sea incompatible (la recta y el plano son paralelos) b) Compatible determinado (la recta y el plano se cortan en un punto que es la solución única del sistema. C) Es compatible indeterminado (la recta está contenida en el plano).

Otro método de resolución es sustituir en la ecuación implíticita del plano, las ecuaciones parámetricas de la recta y despejar el parámetro.

Veamos un ejemplo por los dos métodos:

Dada la r: $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$ y el plano π: 2x+3y-4z-1=0

Estudiar su posición relativa:

Método 1: Mediante el estudio y resolución si ha lugar, del sistema: $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 3x + z = 6 \\ 2x + 3y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$ rango (A) = 3, pues |A|=2; ran(A|B)=3

sistema compatible determinado (solucion única). La recta y el plano se cortan en un punto. Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{matrix}} = \frac{7}{2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{2}$$

El punto de corte es (7/2, -16/2, -9/2)

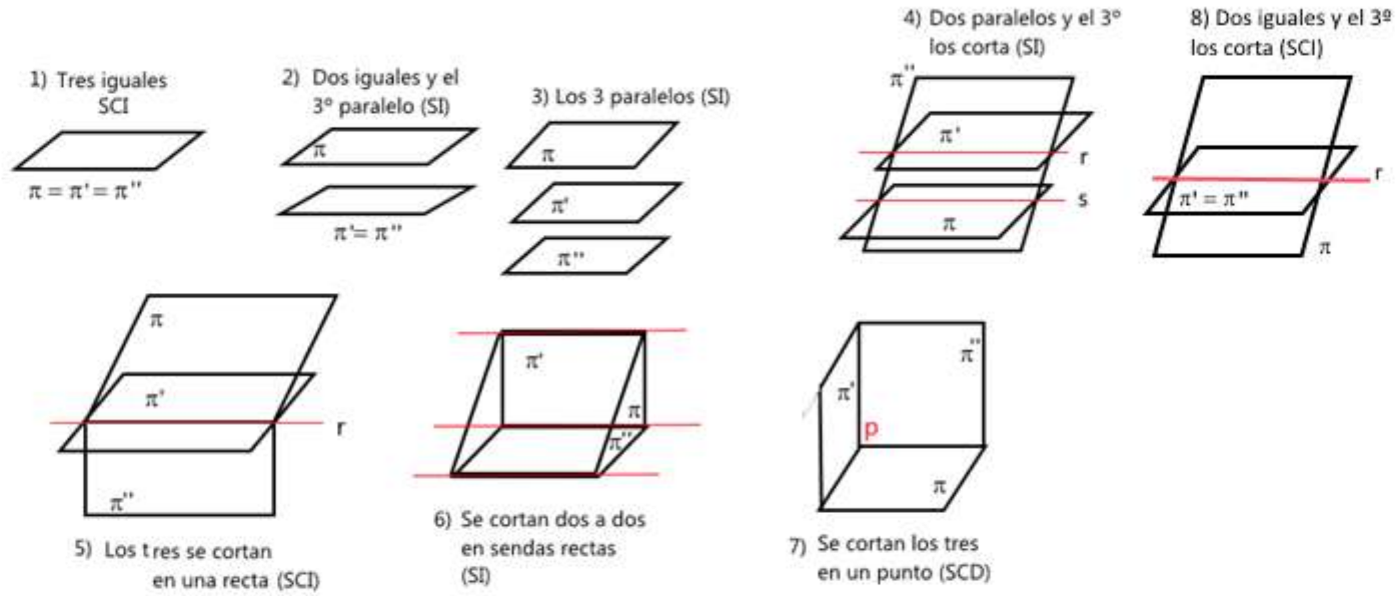
Método 2:

Paramétricas de la recta: .- $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ Sustituimos en la ecuación implícita del plano:

$2(1 - \lambda) + 3(2 + 4\lambda) - 4(3 + 3\lambda) - 1 = 0$ -2λ = 5 ; λ=-5/2

Sustituyendo λ en las paramétricas de la recta obtenemos: x=7/2, y=-8, z=-9/2

Posición relativa entre tres planos:



Sean π: Ax+By+Cz+D = 0 ; π': A'x+ B'y+ C'z+D`=0; π'': A''x+ B''y+ C''z+D``=0 ;

Caso 1) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 1$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 1$. Los tres planos son coincidentes

Caso 2) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 1$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2$ Dos iguales y el 3º paralelo.

Caso 3) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 1$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Los 3 paralelos y distintos.

Caso 4) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Dos paralelos y el 3º corta a los otros dos en sendas rectas.

Caso 8) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2$ Dos iguales y el tercero cortándolos en una recta.

Caso 5) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2$ Los tres se cortan en una recta

Caso 6) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Se cortan dos a dos en una recta

Caso 7) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 3$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Tienen un punto común.

Siempre conviene primero estudiar si hay paralelismo (proporcionalidad entre los vectores normales). Si no es así, es uno de los casos 5 (S.C.I), 6 (S. I) o 7 (S.C.D.)

***Distancias*:**

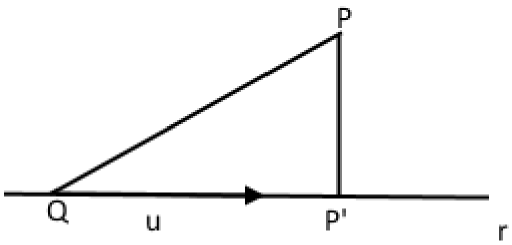
Distancia entre dos puntos

A(a_1, a_2, a_3) B (b_1, b_2, b_3)

La distancia entre A y B es el módulo del vector **AB** (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)

$$d\,(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_2 - a_3)^2}$$

***Distancia de un punto a una recta*:**

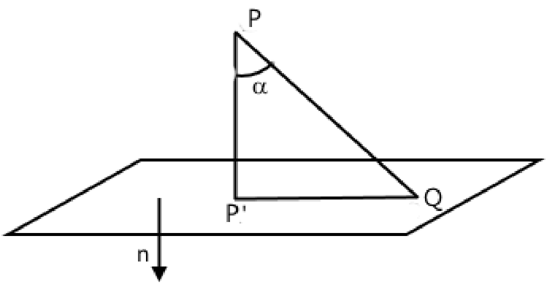


Sea P un punto y r una recta de dirección **u** y que pasa por un punto Q.

d(P,r) = |**PP'**| = |**PQ**|.sen (**PQ,u**) = $\frac{|u|}{|u|}|\mathbf{PQ}|.\,\text{sen}\,(\mathbf{PQ},\mathbf{u}) = \frac{|\mathbf{PQ}\wedge\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$

Distancia de un punto a un plano

Sea el plano π: Ax+By+Cz+D = 0 y el punto P (a_1, a_2, a_3) . Sea Q un punto conocido



del plano Q (b_1, b_2, b_3) d(P,π) = |PP'| = |PQ||cosα| $= \frac{|n|}{|n|}|PQ||cos\alpha| = \frac{|n.PQ|}{|n|}$

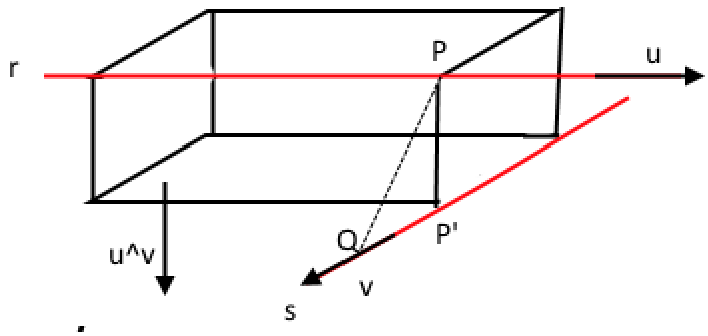
Como **n** (A,B,C) **PQ** (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)

$$\frac{|n.PQ|}{|n|} = \frac{|A(b_1-a_1)+B(b_2-a_2)+C(b_3-a_3)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ab_1+Bb_2+Cb_3-Aa_1-Ba_2-Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|-D-Aa_1-Ba_2-Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Distancia entre dos rectas

Si las rectas son paralelas, el problema se reduce al cálculo de la distancia de un punto a una recta. Basta tomar un punto de r cualquiera y calcular la distancia de dicho punto a la otra recta s. Si las rectas se cortan, la distancia es O.



Sean r, s dos rectas que se cruzan sin cortarse de vectores dirección **u** y **v** respectivamente.

Tomamos un punto P de r.

d(r,s) = |PP'|

Ahora bien,

$$|\mathbf{PP'}|=|\mathbf{PQ}|.|\cos(\mathbf{PQ},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})| = \frac{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}||\mathbf{PQ}|.|\cos(\mathbf{PQ},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|} = \frac{|[\mathbf{PQ},\mathbf{u},\mathbf{v}]|}{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|}$$

Obsérvese que también se puede calcular hallando la distancia entre los dos planos paralelos determinados por un punto de r y un punto de s respectivamente, teniendo ambos como vector normal **u^v.** (Ver ejercicio apartado 17 b) en pag. 85)

La distancia entre dos rectas es la distancia entre los puntos de ambas rectas por donde pasa la recta perpendicular común a ambas. (Ver ejercicio apartado 17 b) en pag. 85)

Distancia entre dos planos:

Si los planos se cortan en una recta, la distancia es 0. Si los planos son paralelos, el problema se reduce al cálculo de la distancia de cualquier punto de uno de los planos al otro. (Distancia de un punto a un plano).También, es fácilmente demostrable que si los planos son paralelos, escribiendo ambas ecuaciones con las mismas componentes del vector normal, es decir:π: Ax+By+Cz+D=0 π': Ax+By+Cz+D' = 0 la distancia entre ambos planos se establece según la siguiente expresión:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿En qué posición relativa pueden estar tres planos en el espacio que no tienen ningún punto en común? Determínese la posición relativa de los planos $\pi: x - 2y + 3z = 4, \sigma: 2x + y + z + 1 = 0, \varphi: -2x + 4y - 6z = 0$ (Santiago, junio 2001)

SOLUCION:

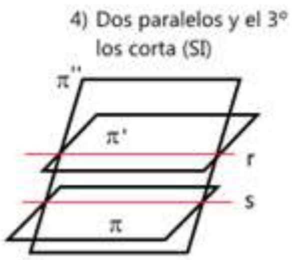
Los tres paralelos, dos coincidentes y el tercero paralelo, dos paralelos y el tercero cortándoles en rectas distintas, se cortan dos a dos en sendas rectas.

Para estudiar la posición relativa de los tres planos, estudiamos primero sus vectores normales para ver si hay paralelismo entre ellos: $\boldsymbol{n_\pi} = (1, -2, 3)$; $\boldsymbol{n_\sigma} = (2, 1, 1)$; $\boldsymbol{n_\varphi} = (-2, 4, -6)$

Se puede apreciar de entrada que $\boldsymbol{n_\varphi} = (-2, 4, -6)$ $y\ \boldsymbol{n_\pi} = (1, -2, 3)$ son claramente dependientes, están en la misma dirección. Veremos si los planos son paralelos o coinciden. Para ello veremos si el término independiente conserva la proporción de las componentes de los vectores que es -2. La proporción entre términos independientes es 0, por lo que los planos son paralelos.

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-6}{3} \neq \frac{0}{-4}$$

El tercer plano no es paralelo a los otros dos. Por lo tanto la posición relativa es: 2 planos paralelos y el tercero cortándolos en sendas rectas.



2. Determinar el ángulo que forman la recta r, que pasa por el punto (1, -1 ,0) y tal que su vector director es v=(-2,0,1) y la recta de ecuación: $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{2}$ (Santiago julio 2001)

SOLUCIÓN:

El ángulo que forman dos rectas es el ángulo formado por sus vectores directores que en este caso son (-2. 0, 1) y (4, 4, 2).

Si hacemos su producto escalar, obtenemos -6 = |(-2,0,1)||(4.4.2)| cos α

$-6 = \sqrt{5.36}.\cos\alpha$ de donde $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\alpha = 116^{\circ}$ o 64° si consideramos el ángulo agudo que forman.

3. Calcular la distancia mínima entre las rectas r y s, donde r tiene por ecuaciones (r: x = 3y = 5z) y la recta s pasa por los puntos A(1,1,1) y B(1,2-3) (Santiago, septiembre 2001)

SOLUCIÓN: Pasamos r a paramétricas: $\begin{cases} x = 5t \\ y = \frac{5}{3}t \\ z = t \end{cases}$

d (r, s) = $\frac{|[\boldsymbol{PQ}, \mathbf{v_r}, \mathbf{v_s}]|}{|\boldsymbol{v_r} \Lambda \boldsymbol{v_s}|}$ P tomo un punto de r: (0, 0, 0) Q un punto de

s (1, 1,1); v_r = (5, 5/3, 1) que los podemos pasar a enteros (15, 5, 3)

$\mathbf{v_s}$ = AB = (0, 1, -4)

$[\mathbf{PQ}, \mathbf{vr}, \mathbf{v_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20-60-3+60 = -23$

$\boldsymbol{v_r \Lambda v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -23i + 60j + 15k$ (-23, 60, 15)

$$d(r,s) = \frac{23}{\sqrt{4354}}$$

4. Hallar la distancia del plano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{4x - 10y + 2z = -1}$ al plano $\boldsymbol{\sigma}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2\lambda + 3\mu} \\ \boldsymbol{y = \lambda + \mu} \\ \boldsymbol{z = \lambda - \mu} \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Paso a cartesiana el plano σ: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 5y - z = 0$

Multiplico la ecuación por -2 y obtengo 4x – 10y +2z = 0. Ambos planos son paralelos y distintos (difieren en el término independiente).

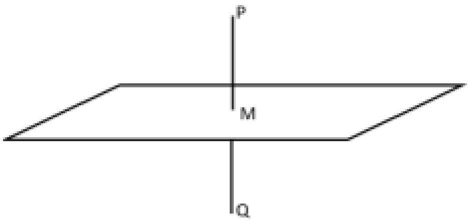
La distancia entre ellos viene determinada por: $\frac{|1|}{\sqrt{120}}$. Utilizo la fórmula que dice que si dos planos son paralelos y sus coeficientes en x y z son iguales (es decir que tienen el mismo vector normal), la distancia viene dada por

$$\frac{|D-D'|}{|\boldsymbol{n}|}$$

Siendo D y D' los términos independientes de ambas ecuaciones.

5. Dados los puntos P=(3, 4, 1) y Q = (7, 2, 7), determinar la ecuación general del plano que es perpendicular al segmento PQ y que pasa por el punto medio de ese segmento. (Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:



Como se aprecia en la figura, el vector normal es el vector **PQ** y el punto por el que pasa es M

M = $\frac{P+Q}{2} = (5,3,4)$ y **PQ** (4, -2, 6) que lo podemos simplificar a (2, -1, 3)

La ecuación pedida es 2x – y + 3z + C = 0

Tenemos que pasa por (5, 3,4); 10-3+12 = -C ; C = -19

2x – y + 3z -19 = 0

6. Determinar el ángulo que determinan el plano $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x+2y-3z+4=0}$ y la recta $\boldsymbol{r}$: $\begin{cases} \boldsymbol{2x-y=0} \\ \boldsymbol{3y+2z=12} \end{cases}$ (Santiago, junio 2003)

Necesitamos el vector director de la recta y el normal del plano. Este último es inmediato pues se compone de los coeficientes de x y z en la ecuació n=(1, 2, -3)

Para averiguar el vector director de la recta podemos pasar la ecuación a paramérica s:

x = t y = 2t z = 6-3t El vector director es (1, 2, -3). Si el vector normal del plano coincide con el vector director de la recta, es obvio que el ángulo que forman recta y plano es de 90º. En cualquier caso se obtiene como el arcsen $\frac{|\mathrm{u.v}|}{|u||v|} = arcsen\ 0 = 90º$

7. Determinar la ecuación que satisfacen los vectores ortogonales a la recta $\boldsymbol{r}$: $\begin{cases} \boldsymbol{2x+y-z=0} \\ \boldsymbol{x-y+3z=0} \end{cases}$. Interpretar geométricamente el resultado obtenido. (Santiago, septiembre 2003)

Sean (x, y, z) las componentes de un vector u perpendicular a r. La condición de perpendicular viene dada porque el producto escalar de u con el vector director de r sea cero.

Calculamos el vector director de r, pasando a paramétricas:

z = t; x = -2t/3; y = 7t/3. El vector de r es (-2/3, 7/3, 1) que podemos multiplicar por 3 sin pérdida de dirección: (-2, 7, 3)

(x, y, z)(-2,7,3) = 0; -2x + 7y + 3z = 0 que es la ecuación de un plano

8. Hallar la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones: $\boldsymbol{r}\begin{cases} \boldsymbol{x=\alpha} \\ \boldsymbol{y=-1} \\ \boldsymbol{z=1-\alpha} \end{cases}$ **s**$\begin{cases} \boldsymbol{x=1+\beta} \\ \boldsymbol{y=2} \\ \boldsymbol{z=2\beta} \end{cases}$

(Santiago, junio 2004)

d (r, s) = $\frac{|[PQ,u,v]|}{|u\wedge v|}$ siendo P y Q puntos de r y s respectivamente, u y v los vectores directores de r y s respectivamente. P (0, -1, 1) Q (1, 2, 0) u (1, 0, -1) v(1, 0, 2)

PQ = (1, 3, -1) $|[PQ, u, v]|$ = $\left\|\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right\| = |-9| = 9$

$u\wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3j$ (0, -3, 0) cuyo módulo es 3.

Entonces d (r, s) = 9/3 = 3

9. Determinar el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, -1) y B = (0, 1, -2) y la recta de ecuación: $\boldsymbol{x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}}$ **(Santiago, junio 2004)**

El ángulo que forman dos rectas es el determinando por el que forman sus vectores directores: AB y (1, 2, -1); AB = (-1, 1, -1)

Cos α = $\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\alpha = 61{,}87º$

10. Comprobar que los puntos A=(1, 0, 3), B = (-2, 5, 4), C = (0, 2, 5) y D= (-1, 4, 7) son coplanarios. De todos los triángulos que se pueden construir teniendo como vértices tres de esos cuatro puntos, ¿cuál es el de mayor área?. Obtener el valor de dicha área. (Santiago, septiembre 2004)

Tomamos los vectores AB (-3, 5, 1); AC (-1, 2, 2) y el punto A (1, 0, 3). Calculamos la ecuación del plano que pasa por A, B y C, esto es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)8 + 5y - (z-3) = 0$$

8x + 5y – z -5 = 0. Comprobamos ahora y D (-1,4,7) está en ese plano.

-8+20-7-5 = 0. En efecto D está en el plano que pasa por A, B y C, por tanto los cuatro puntos son coplanarios.

Con A, B, C, D, podemos formar 4 triángulos ABC ABD BCD y ACD

AD (-2, 4, 4) BC (2, -3, 1) BD (1, -1, 3)

Area (ABD) = $\frac{1}{2}|AB \wedge AD| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|16i + 10j - 2k| = \frac{1}{2}\sqrt{300}$

Area (ABC) = $\frac{1}{2}|AB \wedge AC| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|8i + 5j - k| = \frac{1}{2}\sqrt{90}$

Area (BCD) = $\frac{1}{2}|BC \wedge BD| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-8i - 5j + k| = \frac{1}{2}\sqrt{90}$

Area (ACD) = $\frac{1}{2}|AC \wedge AD| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|0| = \frac{1}{2}\sqrt{0}$

El triángulo de mayor área es ABD

11. Hallar la ecuación general del plano que contiene a la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}$ y es paralelo a la recta s que pasa por los puntos P = (2, 0, 1) y Q = (1, 1, 1). Calcular la distancia de s a el plano pedido. (Santiago, septiembre 2004)

Necesito un punto (1, 1, 0) y dos vectores u(2, 4,2) y v= PQ = (-1, 1, 0)

El plano buscado es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-2) - (y-1)2 + z6 = 0$

El plano es -2x – 2y + 6z + 4 = 0. Simplificamos x + y – 3z – 2 = 0

Antes de hallar la distancia de la recta s al plano, vamos a comprobar si no se cortan.

n = (1, 1, -3) y PQ (-1,1,0). El producto escalar es 0. Por tanto son perpendiculares y además ni P ni Q están en el plano por tanto recta y plano son paralelos. La distancia es la distancia de un punto de la recta (1, 1, 1) al plano:

$$\frac{|1+1-3-2|}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

12. Calcule la distancia entre las rectas de ecuación r: $x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7}$ y

s: $x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ (Santiago, junio 2005)

d (r, s) = $\frac{|[PQ,u,v]|}{|u \wedge v|}$ siendo P y Q puntos de r y s respectivamente, u y v los vectores directores de r y s respectivamente. P (0, 1, 4) Q (2, 2, 3) u (1, 3, 7) v(1, 3, 4)

PQ (2, 1, -1) $[PQ, u, v] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -15$ $|u \wedge v| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix} \right\| =$

$$|-9i + 3j| = \sqrt{90}$$

d(r,s) = $\frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

13. Demostrar que los puntos P(0,0,4), Q(3,3,3), R(2,3,4), S(3,0,1) son coplanarios y determinar el plano que los contiene. (Santiago, junio 2005)

PQ (3,3,-1) PR(2,3,0) PS(3,0,-3) Son coplanarios si el rango es 2

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$ En efecto, el rango es 2, por tanto son coplanarios.

El plano que los contiene: P(0,0,4) y los vectores (3,3,-1) y (2,3,0)

$\begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ -3x +2y +(z-4) (-3) =0 ; -3x + 2y -3z +12 = 0

14. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por el punto (1,1,1) y los vectores u(1, -2,2) y v(1,0,1)

La ecuación general del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=0 ; (x-1)(-2)-(y-1)(-1)+(z-1)2

-2x + y + 2z -1 = 0; d (0,0,0), plano) = $\frac{|-1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

14. Dado el plano π: 2x + my + 3 = 0; y la recta r: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 2z + 6 = 0} \\ \boldsymbol{7x - y - 2z = 0} \end{cases}$

Calcula el valor de m para que la recta esté contenida en el plano. Justifica la respuesta.

¿Para algún valor de m, la recta y el plano son perpendiculares?. Justifica la respuesta. (Santiago, junio 2006)

Para que la recta esté contenida en el plano, el sistema formado por las tres ecuaciones tiene que ser compatible indeterminado, pues la solución es la recta (infinitas soluciones).

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-2z+6=0} \\ \boldsymbol{7x-y-2z=0} \\ \mathbf{2x + my = -3} \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \\ 2 & \mathrm{m} & 0 \end{vmatrix}$ no puede tener rango 3, tiene que tener rango 2, para lo que

Su determinante -12m – 12 = 0, por tanto m = -1. En esas condiciones el rango (A) = 2.

Para comprobar el rango de la ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ = 45, rango (A|B) = 3.

Conclusión: no existe valor de m para el cual, la recta esté contenida en el plano.

Otra forma de hacerlo es pasando la recta a paramétricas y sustituyendo en el plano:

r: $\begin{cases} x+2y-2z+6=0 \\ 7x-y-2z=0 \end{cases}$ z = t ; x = $\frac{2t}{5}-\frac{2}{5}$; y = $\frac{4t}{5}-\frac{14}{5}$

2($\frac{2t}{5}-\frac{2}{5}) + m\left(\frac{4t}{5}-\frac{14}{5}\right)+3=0$; t = $\frac{-11+14m}{4+4m}$. Para cualquier valor distinto de

m ≠ -1, t tiene una solución que genera un punto de corte de la recta con el plano, por lo que no hay infinitas soluciones

La recta y el plano son perpendiculares cuando el vector normal del plano n (2, m, 0) está en la dirección del vector director de la recta, v(2, 4,5)

Rango $\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 1$; Esto es falso siempre puesto que el rango de esa matriz es 2, basta tomar el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

15. a) Dados los vectores u = (1, 0, -1), v = (1, 1, 0), calcula los vectores unitarios que son ortogonales a los dos vectores dados.
b) Sea π el plano determinado por el punto P (2, 2, 2) y los vectores del apartado anterior. Calcula el ángulo que forma el plano con la recta que pasa por los puntos O (0,0,0) y Q (2, -2, 2).
c) Calcula el punto simétrico de O (0,0,0) respecto del plano x – y + z – 2 = 0
(Santiago, septiembre 2006)

a) Los vectores ortogonales son **u^v** y **v^u**, que solamente se diferencian en el signo, por lo que basta realizar uno solo de ellos.

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i - j + k$$

Los vectores ortogonales son (1, -1, 1) y (-1,1,-1) ambos tienen módulo $\sqrt{3}$

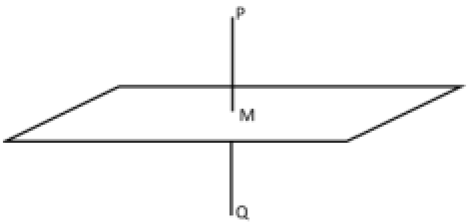
Los vectores unitarios pedidos son $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$

b) El ángulo que forma recta y plano es el arcsen del ángulo que forman vector normal al plano y vector director de la recta. En nuestro caso, el vector normal al plano n es (1, -1, 1) y el vector director de la recta es (2, -2, 2). Resulta obvio que al ángulo que forman es 0º. De todos modos calculamos

$$\text{Cos } \alpha = \frac{|u.v|}{|u||v|} = \frac{6}{\sqrt{3}.\sqrt{12}} = 1. \text{ Si cos } \alpha = 1, \quad \text{sen } \alpha = 0.$$

arcsen 0 = 0º.

c)



Sea P (0,0,0). El simétrico de P, respecto del plano es el punto Q, de forma que M es el punto medio de P y Q.

El plano tiene por ecuación x – y + z – 2 = 0

La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es $x = -y = z$

Resolviendo el sistema con el plano, resulta que 3x = 2; x = 2/3; y = -2/3; z = 2/3.

Por tanto hemos obtenido las coordenadas de M.

Pero P+Q/2 = M, de donde Q = 2M – P = (4/3, -4/3, 4/3)

16**. Los lados de un triángulo están sobre las rectas**

$$\boldsymbol{r}: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad \boldsymbol{s}: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -1 \end{cases} \quad \boldsymbol{t}: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula los vértices del triángulo. ¿Es un triángulo rectángulo? Razona la respuesta.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene al triángulo. Calcula la intersección del plano con los ejes OX, OY, OZ. (Santiago, septiembre, 2006)

a) Para hallar los vértices hay que intersecar las rectas dos a dos. r y s determinan un punto de corte que es (1, 1, -1). r y t se cortan en el punto (3, -1, 3) y s y t se cortan en el punto (-1,-1,-1)

Para ver si es rectángulo hay que determinar si entre los ángulos que forman hay alguno de 90º, es decir si un par de vectores directores tienen producto escalar 0.

El vector director de r es (1, -1, 2), el vector de s es (1, 1, 0) y el de t (1, 0, 1). El producto escalar del vector de r y el de s es nulo, por tanto s y t forman un ángulo de 90º y el triángulo es rectángulo.

b) Tomo el punto (1, 1, -1) y los vectores de s y t

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ (x-1)-(y-1)-(z+1)=0;$$

$$x-y-z-1=0$$

Corte con el eje OX (y=z=0) x = 1 (1, 0,0)
Corte con el eje OY (x=z=0) y = -1 (0, -1, 0)
Corte con el eje OZ (x=y=0) z = -1 (0, 0, -1)

17. **Dadas las rectas de ecuaciones:**

$$\boldsymbol{r}:\begin{cases} \boldsymbol{x=1+\alpha} \\ \boldsymbol{y=\alpha} \\ \boldsymbol{z=1-\alpha} \end{cases} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{s}:\begin{cases} \boldsymbol{x=2+2\beta} \\ \boldsymbol{y=\beta} \\ \boldsymbol{z=2-\beta} \end{cases}$$

a) Estudiar su posición relativa.
b) Distancia entre ellas
c) Hallar la perpendicular común a ambas.

SOLUCIÓN:

a) V_r = (1,1,-1); P_r = (1, 0, 1) ; V_s = (2, 1, -1); P_s = (2, 0, 2). P_rP_s = (1, 0, 1)

Rango ($Vr_,V_s$) = 2. Por tanto están en distinta dirección.

Rango (V_r , V_s , P_rP_s) = 3. Las dos rectas se cruzan en el espacio sin cortarse.

b) d(r,s) = $\frac{|[\text{PrPs},\mathbf{vr},\mathbf{vs}]|}{|\mathbf{vr}\wedge\mathbf{vs}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u.$

$[\text{PrPs},\mathbf{vr},\mathbf{vs}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = -1 $\quad \mathbf{vr}\wedge\mathbf{vs} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1)$

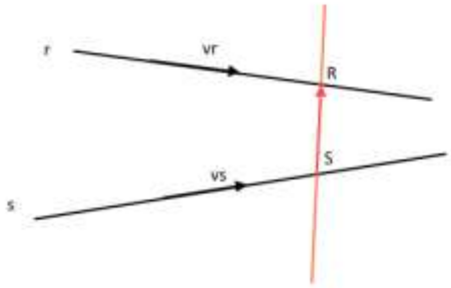
Cálculo de la distancia mediante planos paralelos:

Ecuación del plano que contiene a r y tiene como dirección vr^vs : -y +z -1 = 0

Ecuación del plano que contiene a r y tiene como dirección vr^vs : -y +z -2 = 0

La distancia entre ambos viene determinada por $\frac{|-1-(-2)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u.$

c) Cálculo de la perpendicular común:



La perpendicular común es la recta que pasa por R y S, siendo R y S puntos de r y s respectivamente y con la condición de que dicha recta sea perpendicular a r y a s.

Por lo tanto el vector SR es perpendicular a v_r y a v_s. Su producto escalar será cero.

Ahora bien R está en r, por tanto las coordenadas de R son (1+α , α, 1-α)

S está en s, por tanto sus coordenadas son (2+2β, β, 2-β)

El vector SR (-1+α-2β, α-β, -1+β-α)

(-1+α-2β, α-β, -1+β-α). (1,1,-1) = 0 , de donde : 3α - 4β = 2

(-1+α-2β, α-β, -1+β-α). (2, 1, -1) = 0 de donde: 4α - 6β = 1

α = -2 y β = -3/2; Sustituyendo en el punto R y en el vector SR los valores obtenidos, la recta buscada pasa por el punto (-1, -2, 3) y con vector director (0, 1, 1), es decir:

$$\mathbf{t}:\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 + \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

Cálculo de la distancia mediante la perpendicular común:

Si quisiéramos calcular la distancia entre ambas utilizando la perpendicular común, tendríamos que calcular la distancia entre R y S, siendo R (-1, -2, 3) y S (-1, -3/2, 7/2)

d (r, s) = d (R, S) = $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1^2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, u.$ que coincide con el valor obtenido en el apartado b)

EJERCICIOS PROPUESTOS

(soluciones en la página 92)

Ejercicio 1.- a) Calcula m para que los puntos A(2,1,-2), B(1,1,1) y C(0,1,m) estén alineados.

b) Calcula el punto simétrico del punto P (-2, 0,0) respecto de la recta que pasa por los puntos A (2,1,-2) y B (1,1,1) (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 2.- Dadas las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$; $s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

a) Estudiar su posición relativa.
b) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 3.- a) Los puntos A(1,1,0), B(0,1,1) y C (-1,0,1) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD. Calcula las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto B(0,1,1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y C (-1,0,1). (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 4.- Dadas las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$; $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$

a) Estudiar su posición relativa
b) Calcular la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

(Santiago, junio 2007)

Ejercicio 5.-

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que pasa por el punto P(1,1,2) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
b) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano $\boldsymbol{\pi}$: x - 2y + 2z - 3 = 0 con los ejes de coordenadas. ¿Es un triángulo rectángulo? (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 6.-

a) Dados los planos $\pi_1: x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + 2\alpha + 2\mu \\ y = 2\alpha - 2\mu \\ z = 1 + \alpha - 3\mu \end{cases}$ estudiar su posición relativa y calcular la distancia entre ellos.
b) Dado el punto P(2,1,7), calcula su simétrico respecto al plano π_2 (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 7.- Dadas las rectas $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$; $s: \begin{cases} x = 1 + 6\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = -4\alpha \end{cases}$ estudiar su posición relativa y calcular la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,1,1) y contiene a r. (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 8.-

a) ¿Son coplanarios los puntos A(1,0,0), B (3,1,0), C(1,1,1) y D(3, 0, -1)? En caso afirmativo, calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que los contiene.
b) Calcula el punto simétrico del punto P (0,0,1) respecto del plano x-2y+2z-1=0 (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 9.- Sea r la recta que pasa por los puntos P(0,8,3) y Q(2,8,5) y s la recta $s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcular el punto de corte.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano que contiene a r y s. (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 10.- Sean π el plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) y r la recta dada por $r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$

a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano. Calcula el punto de intersección de la recta y el plano.
b) Calcula los puntos de la recta que distan 6 unidades del plano. (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 11.- Dados los planos $\pi_1: x + y + z - 1 = 0, \pi_2: y - z + 2 = 0$, y la recta $r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

a) Calcula el ángulo que forman ambos planos. Calcula el ángulo que forma π_1 y r.
b) Estudia la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los dos planos. (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 12.-

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,35) y es perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = -1 + 2m \\ y = 2 + 2m + n \\ z = 2 + 3m + n \end{cases}$
b) Calcula la distancia del punto P(2,3,5) al plano π. Calcula el punto del plano π que está más próximo al punto P(2,3,5). (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 13.- Sea r la recta que pasa por el punto P(1, -1,2) y es perpendicular al plano x + 2y + 3z +6 = 0. Sea s la recta que pasa por los puntos A(1,0,0) y B(-1,-3,-4)

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte.
b) Calcula la distancia del punto A(1,0,0) al plano que pasa por el punto P(1,-1,2) y es paralelo al plano x + 2y + 3z +6 = 0. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 14.- Dada la recta $r\colon \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano π que pasa por el punto Q (0,2,2) y contiene a la recta r. Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección de π con los ejes de coordenadas.
b) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 15.- Dada la recta $r\colon \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular a r y que pasa por el punto P(2, -1, -2)
b) Calcula el punto Q en el que la recta corta a π. Calcula el ángulo que forma el plano π con cada uno de los planos coordenados. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 16.- Dadas las rectas $r\colon \begin{cases} x = 3 - 3\alpha \\ y = -4\alpha \\ z = -6 \end{cases}$ $\quad s\colon \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 5y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa. Si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman r y s.
b) Calcula, si existe, el plano que las contiene. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 17.-

a) ¿Son coplanarios los puntos A(1, 0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0) y D(0,2,2)? Si existe, calcula la ecuación del plano que los contiene.
b) Calcula la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que es perpendicular al plano 2x + y – 3z + 4 = 0 y contiene a la recta que pasa por los puntos P(-1.1,2) y Q(2,3,6) (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 18.-

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2,-3) y es perpendicular a la recta $r\colon \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$
b) Calcula la distancia *d* del punto Q(-1,0,-2) al plano x – 2y + 3z +12 = 0. Calcula, si existe, otro punto de la recta r que también diste *d* del plano dado. (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 19.-

a) Dado el plano $\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ calcula la ecuación de la recta r que pasa por el punto P(1, -2,1) y es perpendicular a π. Calcula el punto de intersección de r en π

b) ¿Están alineados los puntos A(2, 0, 3), B(0, 0, 1) y C (2, 1, 5)? Si no están alineados, calcula la distancia entre el plano que determinan estos tres puntos y el plano π del apartado a) (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 20.- Dados los puntos A(3,0,2), B(-1,2,0), C(1,-1,3) y D(α, α-2, -α)

a) Determina el valor de α para que A, B, C y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de α son A, B, C y D, vértices de un paralelogramo?

b) Calcula las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta r que pasa por los puntos A y B. (Santiago, junio 2021)

Ejercicio 21.- Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos A(-1,5,0) y B(0,1,1) y es paralelo a la recta:

$r: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 22.- Dado el plano π: x – 2y +3z + 6 = 0

a) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

b) Calcula la ecuación general del plano que es perpendicular al plano π, paralelo a la recta que pasa por los puntos B(0,3,0) y C(0,0,2) y pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π: x – 2y + 3z + 6 = 0 (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 23.-

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x + y + z - 5 = 0$ y el plano $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$ Si se cortan en una recta, escribe las ecuaciones paramétricas de la misma.

b) Calcula la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a π_1 y π_2. Calcula la intersección de π_1, π_2 y π_3 (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 24.- Dados el plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de r en π. Calcula la distancia de r a π.

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π. (Santiago, junio 2013)

c)

Ejercicio 25.

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinando por los puntos A(1, 0,2), B (2, 1, 3) y C (3, 0, 0).
b) Calcula los posibles valores de a para que el punto P (a,a,a) equidiste de la recta r y del plano del apartado anterior. (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 26. Dadas las rectas $s: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$ $r: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte. Si determinan un plano, calcula la ecuación general o implícita de ese plano.
b) Estudia la posición relativa de r y el plano $\pi: 4x - 4y + 2z + 7 = 0$. Calcula la distancia de r a π. (Santiago, septiembre 2013)

Ejercicio 27.

a) Dado el plano $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda + \mu \\ y = -3\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ calcula las ecuaciones en forma continua de la recta r que pasa por el punto P(2, -3, -4) y es perpendicular al plano α dado. Calcula el punto de corte de r con el plano α.
b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos P (2, -3,-3,) y Q (3, -2, -4) y es perpendicular al plano α.
c) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del plano $\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$ con el plano α (Santiago, septiembre 2013)

Ejercicio 28.

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

a) Estudiar su posición relativa
b) Si se cruzan en el espacio, averiguar la recta perpendicular común a ambas, así como su distancia.

Ejercicio 29.

Dados el plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$. Hallar la recta s que pasa por el punto (1,0,1), es paralela al plano y se apoya en la recta r.

Ejercicio 30.

Halla los puntos de r : $\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2 \end{cases}$ que distan 2 unidades del plano $\pi: 4x + 3z = 0$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1) a) m = 4 ; b) (4,2,2)
2) a) Se cruzan ; b) -5x + 4y -3z + 2 = 0
3) a) D = (0,0,0), Área = $\sqrt{3}\,u^2$; b) -2x – y + z = 0
4) a) Se cruzan; b) 2x – 2y + z = 0
5) a) 1 u. b) 27/4 u^2. No es rectángulo.
6) a) Son paralelos. distan 1 u. b) $\left(\frac{-2}{9},\ \frac{49}{9},\ \frac{23}{9}\right)$
7) Rectas paralelas; 2x + y + 4z – 7 = 0
8) a) Son coplanarios. Distancia = 1/3 u. b) $\left(\frac{-1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9}\right)$
9) a) Se cortan en el punto (1, 8, 4) ; b) $\begin{cases} x = -2\mu \\ y = 8 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}$
10) a) 90º , (5,-5,-5) ; b) (1, -3, -9) y (9, -7, -1)
11) a) 90º , 0º ; b) Son paralelas.
12) a) $\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$ b) $\frac{1}{3}\,u.$; $\left(\frac{19}{9},\ \frac{29}{9},\ \frac{43}{9}\right)$
13) a) Se cruzan. b) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$ u.
14) a) -x + 2y + z – 6 = 0 ; $9\sqrt{6}\,u.$ b) x + y – z + 3 = 0.
15) a) –x + z + 4 = 0 b) Q (4, -1, 0) ; 45º con plano xy e yz. 90º con plano xz
16) a) Se cortan en el punto (0, -4, -6) ; 45º b) 4x – 3y – 12 = 0.
17) a) Son coplanarios ; 2x + y – 3z + 4 = 0 b) -10x + 17y – z -25 = 0
18) a) –x + 2y – 3z – 12 = 0. b) $\frac{5\sqrt{14}}{14}u.$; ; $\left(\frac{-7}{2},\ 5,\ \frac{-19}{2}\right)$
19) a) $\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -2 + 2\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$; (2, 0, 0) b) No están alineados; $\frac{\sqrt{6}}{6}$ u.
20) a) No existe valor de α para el cual sean coplanarios. No forman un paralelogramo nunca. b) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 4 - 2\alpha + \beta \end{cases}$
21) 11x + 4y – 5z – 9 = 0 ; $\begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = 1 - 4\alpha + 3\beta \\ z = 1 + \alpha + 2\beta \end{cases}$
22) a) $3\sqrt{14}\,u^2$. b) 5x – 2y – 3z = 0 c) $\left(\frac{-6}{7},\ \frac{12}{7},\ \frac{-18}{7}\right)$
23) a) Se cortan en la recta $\begin{cases} x = \mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 1 \end{cases}$ b) x – y = 0 ; (2, 2, 1)
24) a) r es paralela a π ; d (r, π) = $\sqrt{3}\,u.$ b) x + z – 4 = 0.
25) a) $\begin{cases} x = \mu \\ y = -2\mu \\ z = \mu \end{cases}$ b) a = $\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$
26) a) Se cortan en el punto (1, 1, 0); 2x – 2y + z = 0. b) r y π paralelos; $\frac{7}{6}\,u^2$.
27) a) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}$; $\left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$ b) 5x – 4y +z – 19 = 0
c) $\begin{cases} x = 5\alpha \\ y = \frac{-51}{10} + 3\alpha \\ z = \frac{-7}{5} + 7\alpha \end{cases}$
28) a) Se cruzan. b) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \frac{5}{3} + \mu \end{cases}$
29) $\begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$
30) (1,1,2) y (-4,-4,2)

TEMA V

CÁLCULO DIFERENCIAL

Definición: Se llama *función real de variable real* a toda correspondencia de ℝ en ℝ, de forma que a cada elemento de ℝ se le asocia *uno o ningún* elemento de ℝ. El conjunto de elementos de ℝ a los que se le asocia un número real mediante la función, se le denomina *Dominio de la función.*

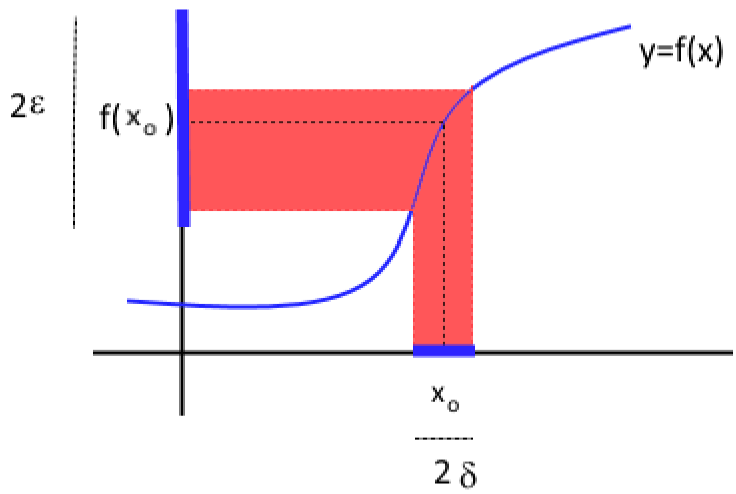
Dom (f) = $\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

Definición.- Una función f(x) es continua en un punto $x_o \in$ Dom (f) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_o| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

En términos de entornos:

Para todo entorno centrado en $f(x_o)$ y radio ε, existe un entorno centrado en x_o y de radio δ, de modo que las imágenes, mediante la función, de todos los elementos del entorno de radio δ, alcanzan el interior del entorno de radio ε



Equivalentemente, se dice que una función f es continua en un punto x_o si se verifica:

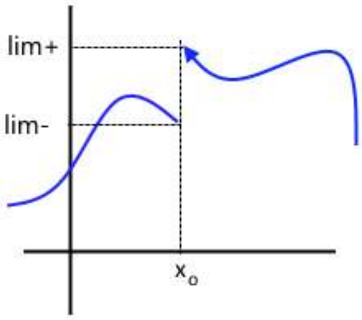
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) \qquad (1)$$

Cuando las funciones estén definidas lateralmente, la existencia del límite requiere que el limite por la derecha y por la izquierda coincidan, es decir

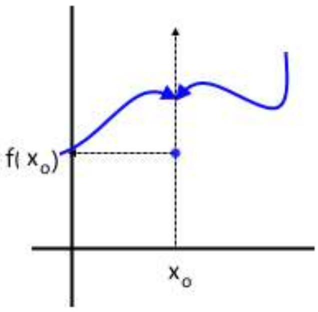
$$\lim_{x \to x_o+} f(x) = \lim_{x \to x_o-} f(x) = f(x_o)$$

Tipos de discontinuidad:

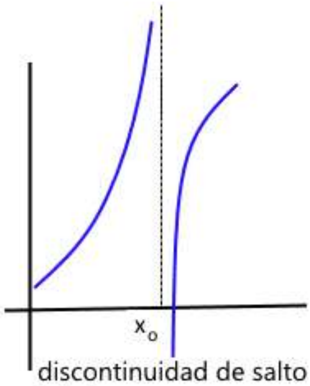
Cuando la igualdad (1) no se da, la función es discontinua y se pueden presentar los siguientes casos:



discontinuidad de salto finito



discontinuidad evitable



discontinuidad de salto infinito

Discontinuidad de salto finito:

$$\lim_{x \to x_o +} f(x) \neq \lim_{x \to x_o -} f(x)$$

Discontinuidad evitable

$$\lim_{x \to x_o +} f(x) = \lim_{x \to x_o -} f(x) \neq f(x_o)$$

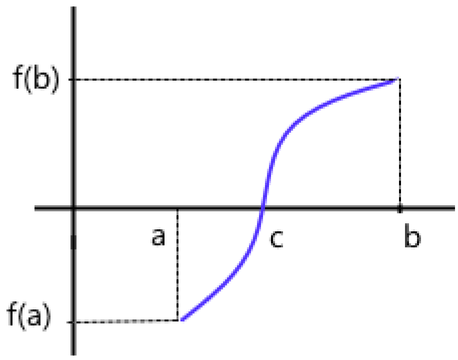
Discontinuidad de salto infinito

$$\lim_{x \to x_o +} f(x) \; o \; \lim_{x \to x_o -} f(x) = \pm\infty$$

Teorema de Bolzano (Existencia de las raíces de una función)

Sea f una función real de variable real.

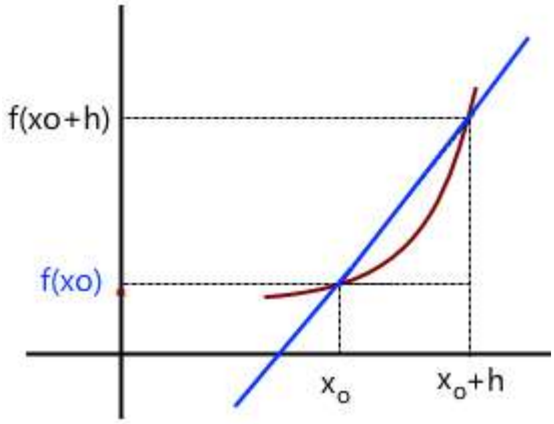
$$\begin{matrix} f \; continua \; en \; [a,b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{matrix} \Longrightarrow \exists c \in a,b / f(c) = 0$$



El punto c, cuya existencia garantiza el teorema de Bolzano no tiene porque ser único.

Derivada de una función en un punto.

Si tomamos un incremento del punto x_o, h>0, se llama cociente incremental de la función f en el punto x_o e incremento h, al cociente:



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$

Llamamos derivada de la función f(x) en el punto x_o, al límite de ese cociente incremental cuando h tiende a 0, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$

Se representa por f'(x_o).

Como x_0+h varía en función de h, podemos hacer un cambio de variable, mediante la igualdad $x_0+h=x.$ Es obvio que si h tiende a 0, x tiende a x_0. Por tanto también se puede definir la derivada de una función en un punto, del siguiente modo:

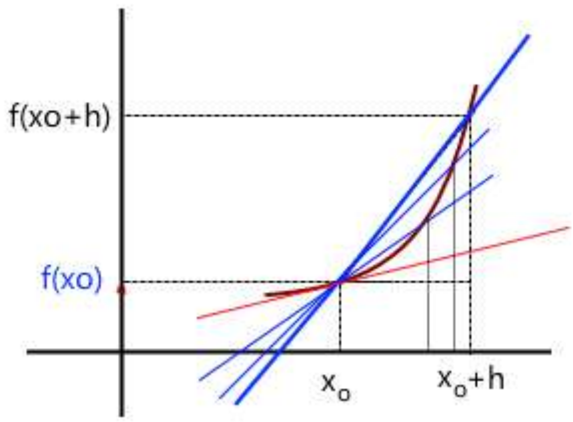
$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto:

Si nos fijamos en la figura anterior, observamos que la pendiente de la recta secante a la función en los puntos x_o y f(x_o+h) es precisamente el cociente incremental

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$

Ahora bien, si h la vamos haciendo cada vez más pequeña, observamos como la secante va convergiendo hacia la recta tangente a la función en el punto x_o, por tanto *la derivada es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto x_o.*



Definición.- Se dice que una función f, continua en x_o, es derivable en un punto x_o, cuando existe f'(x_o)

Derivada de una suma: $(f+g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$

Derivada de un producto:

$$(f.g)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + g'(x_o)f(x_o)$$

Derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - g'(x_o)f(x_o)}{g(x_o)^2}$$

Derivada de una composición (Regla de la cadena)

$$(gof)'(x_o) = g'(f(x_o))f'(x_o)$$

PROPOSICIÓN.- Si f es derivable es x_o entonces es continua en x_o (El recíproco no es cierto)

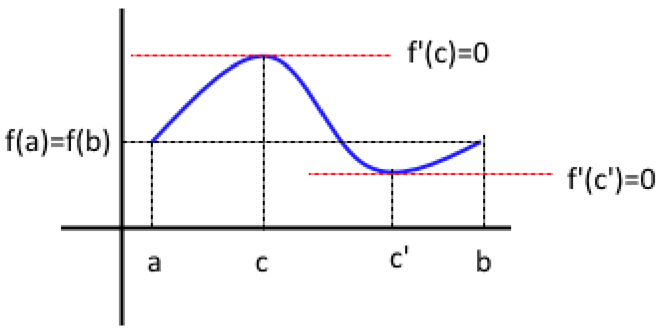
Tabla de derivadas de las funciones simples más comunes:

FUNCION	DERIVADA	FUNCION	DERIVADA
k (constante)	*0*	*lnx*	*1/x*
x	*1*	$log_a x$	$\frac{1}{x} ln\, a$
x^n	nx^{n-1}	e^x	e^x
a^x	$a^x\, ln\, a$	*senx*	*cosx*
cosx	*-senx*	*tagx*	$\frac{1}{cos^2x}$
arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*arccosx*	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctagx	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt{x^{n-1}}}$

Teorema de Rolle (Existencia de las raíces de la derivada)

$$\begin{array}{l} f\ continua\ en\ [a,b] \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \Longrightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{array}$$

Interpretación geométrica del Teorema de Rolle:

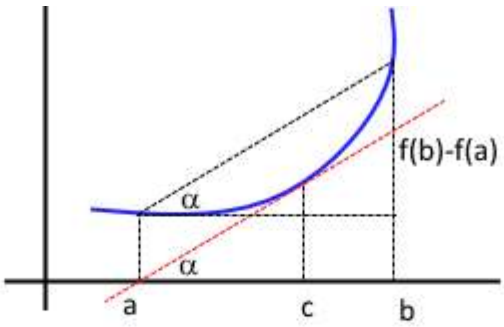


En las hipótesis del Teorema de Rolle, existe al menos un valor c en el interior de (a, b) de modo que la recta tangente en ese punto tiene pendiente nula.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial

$$\left.\begin{matrix} f \ continua\ [a,b] \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \end{matrix}\right\} \rightarrow \exists c \in a,b / f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Interpretación geométrica:



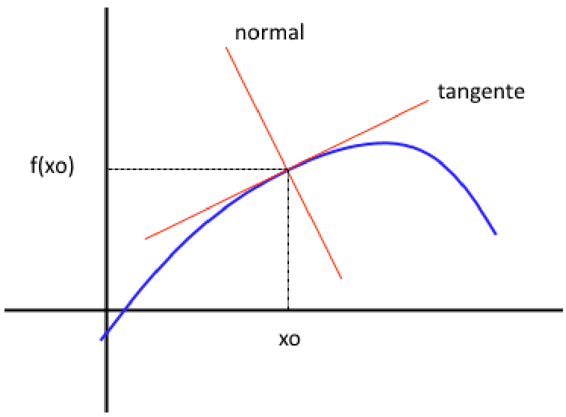
Vemos que la pendiente de la recta secante es

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

que coincide con la pendiente de la tangente a la curva en el punto c, es decir f'(c)
O en otras palabras, existe un punto c en el interior de (a,b) de modo que la tangente en ese punto es paralela a la secante de extremos (a,f(a)) y (b,f(b))

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecuación de la tangente y la normal a una función en un punto xo



Si tenemos una función derivable en un punto x_o, tenemos $f(x_o)$ y $f'(x_o)$. De la interpretación geométrica de la derivada, se sabe que la recta tangente a la función en el punto x_o es la recta que pasa por $(x_o, f(x_o))$ y tiene por pendiente $f'(x_o)$. Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la ecuación buscada es:

97

$$y - f(xo) = f'(xo)(x - xo)$$

Por definición, la recta normal a la función en x_o es la perpendicular a la tangente en dicho punto. Dado que dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es -1. La pendiente de la recta normal es $\frac{-1}{f'(xo)}$ por lo que la ecuación de la recta normal es:

$$y - f(xo) = \frac{-1}{f'(xo)}(x - xo)$$

Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.

Cuando nos encontramos antes las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ independientemente de a lo que tienda x, se verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que se verifiquen las condiciones de derivabilidad exigibles en f y g para obtener el límite. Esta es llamada la Regla de l'Hôpital.
Mediante procedimientos algebraicos, todas las indeterminaciones restantes, tales como
$0.\infty$ $\infty - \infty$ 1^{∞} 0^{0} ∞^{0} las vamos a transformar en $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ para poder aplicar la regla.

Ejemplo de la intetermінación $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{1} = 1$

Ejemplo de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$

Ejemplo de la indeterminación $0.\infty$: $\lim_{x\to 0} x\ln senx = \lim_{x\to 0}\frac{\ln senx}{1/x}$ que es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
y aplicando la regla de l'Hôpital, queda $\lim_{x\to 0}\frac{\ln senx}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{cotgx}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x^2 cotgx = 0$

Ejemplo de la indeterminación $\infty - \infty$: $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}\right]$ que es $\frac{0}{0}$
y aplicando la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}}\right] = 0$

Ejemplo de la indeterminación 1^{∞} : $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Cuando se trata de una indeterminación de tipo exponencial, se calcula el logaritmo del límite, es decir:
$\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \frac{1}{x}\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[(1+x)]$ que es del tipo $\frac{0}{0}$
Aplicando l'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[(1+x)] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$; por tanto el límite inicialmente buscado es $e^1 = e$
El resto de las indeterminaciones exponenciales, se hace de forma análoga a la anterior.

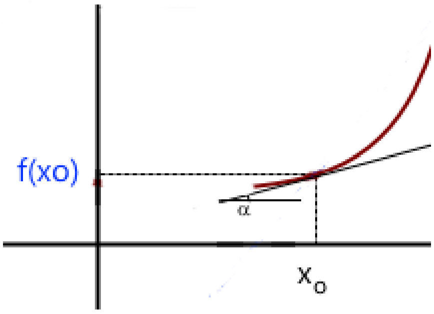
Es importante destacar que la regla solo es aplicable a las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$

Crecimiento y extremos relativos de una función:

Mediante la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, vamos a dar una serie de proposiciones que las ilustraremos gráficamente en ausencia de una demostración rigurosa:

PROPOSICIÓN.- Sea f derivable en x_o. Si $f'(x_o) > 0$, entonces f es creciente en x_o

Dado que $f'(x_o)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto, Si $f'(x_o) > 0$ la recta tangente en dicho punto tiene pendientes positiva, esto ocurre solamente si la función es creciente en x_o



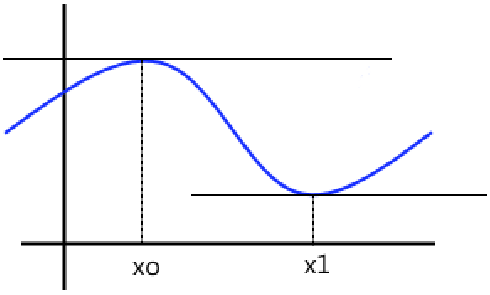
Obsérvese como la recta tangente en x_o tiene pendiente positiva (tag$\alpha > 0$)

Análogamente, si Si f'(x_o) < 0, entonces f es decreciente en x_o.

Definición.- Si una función es continua en x_o, se dice que presenta un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando la función en x_o cambia de creciente a decreciente (máximo) o de decreciente a creciente (mínimo).

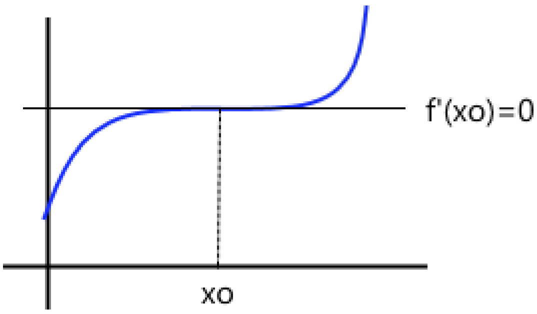
PROPOSICIÓN.

Si la función es derivable en x_o, y presenta un máximo o un mínimo relativo, entonces f'(x_o)=0 (El recíproco no tiene porque ser cierto)



En x_o la función presenta un máximo relativo y en x_1, un mínimo relativo.
En ambos casos la recta tangente es horizontal, es decir de pendiente nula.
Así pues, por la interpretación geométrica de la derivada, tanto f'(x_o) como f'(x_1) se anulan.

Que el recíproco no es cierto, podemos verlo en la siguiente gráfica:



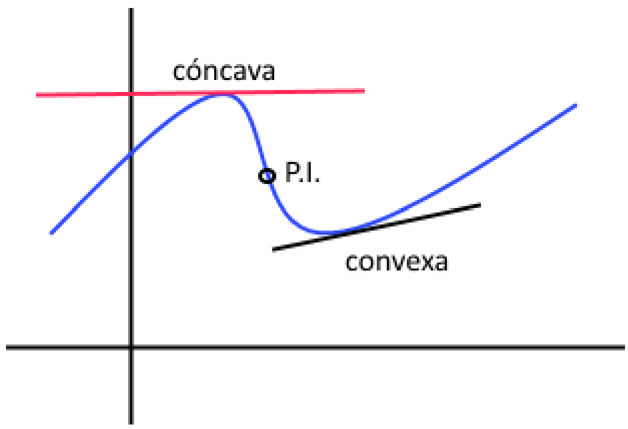
Vemos que la función en x_o no presenta ni máximo ni mínimo relativo, y sin embargo la recta tangente es horizontal.

Véase como ejemplo f(x) = x^3

Criterio de la segunda derivada para la determinación de extremos relativos.

$$Si\ f'(xo) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Si\ f''(xo) < 0\ \ En\ xo\ hay\ un\ máximo\ relativo \\ Si\ f''(xo) > 0\ \ En\ xo\ hay\ un\ mínimo\ relativo \\ Si\ f''(xo) = 0\ el\ criterio\ no\ decide \end{cases}$$

Definición.-
Diremos que una función es *cóncava* en un punto x_o, cuando la recta tangente a la función en dicho punto queda por encima de la gráfica de la función en un entorno del punto.
Por el contrario, la función es convexa cuando la tangente queda por debajo de la gráfica de la función en un entorno de dicho punto



PROPOSICIÓN

Si la función es dos veces derivable en x_o y f''(x_o) >0, entonces la función es convexa en x_o.

Si la función es dos veces derivable en x_o y f''(x_o) <0, entonces la función es cóncava en x_o.

Definición.- Se llama punto de inflexión a aquel donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

PROPOSICIÓN

Si la función es dos veces derivable en x_o y presenta un punto de inflexión en x_o, entonces f''(x_o) = 0.

Representación gráfica de funciones:

Los elementos a utilizar en la representación gráfica de funciones serán:

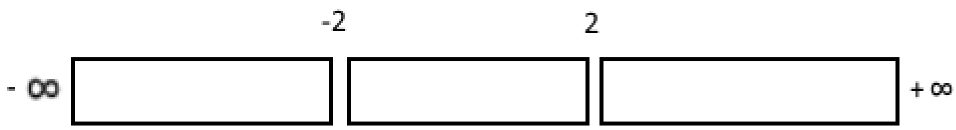
Dominio de la función, Puntos de corte con los ejes, signo de la función, Simetrías, Crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, Asíntotas, Concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Veamos un ejemplo donde estudiaremos todos los aspectos anteriores:

Veamos la gráfica de la función $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

<u>Dominio</u>*:*

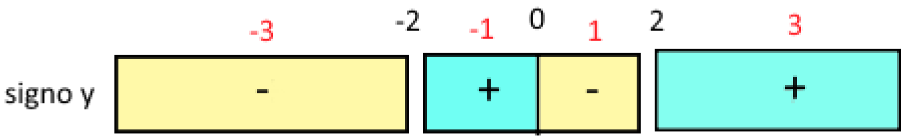
Como se trata de un cociente de polinomios, el dominio es todo R, salvo los puntos que anulan el denominador, por tanto el dominio es R-{2, -2} que expresado en intervalos sería (-∞ , -2) U (-2 , 2) U (2 , +∞)



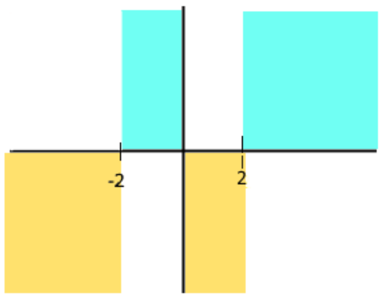
Cortes con los ejes:
Eje x (y = 0) ; x = 0. Corta en el punto (0 , 0)
Eje y (x = 0) ; y = 0. Corta en el punto (0 , 0)

Signo de la función:

Sobre el dominio, extraemos los puntos que anulan la función (corte con eje y), en nuestro caso x = 0. En los intervalos que nos quedan estudiamos el signo de la función que establecerá cuando la gráfica está por encima (positiva) o por debajo (negativa) del eje OX. Para ello basta tomar cualquier valor dentro del intervalo (ya separados) y ver que signo toma la función en dicho valor; ese signo se mantiene en todo el intervalo.



Esto nos determina las regiones del plano por donde pasará la función:



Simetrías:

Hay dos tipos de simetrías:
a) Simetría respecto el eje OY o simetría par, cuando f(x) = f(-x)
b) Simetría respecto al origen o simetría impar, cuando f(-x) + f(x) = 0

En nuestro caso se descarta la simetría par por la figura anterior. Veamos si la hay impar

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$; $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-4}$ Es obvio que f(-x) + f(x) = 0

Por tanto hay simetría impar.

Asíntotas:
Una asíntotas es una recta que dirige la "marcha" de la gráfica de la función cuando esta se aleja hacia el infinito, de modo que cada vez se acerca más a la recta sin llegar a cortarla[5]
Hay tres tipos de asíntotas:

[5] Es un error creer que la asíntota y la función nunca se cortan. Es importante subrayar que una asíntota puede cortar a la función en las proximidades del origen, puesto que su funcionalidad es cuando se aleja hacia el infinito. Por eso, en algunas ocasiones, se suele estudiar un apartado que consiste en averiguar los puntos de corte de las asíntotas con la gráfica.

Asíntota horizontal: y = k de modo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$
Asíntota vertical: x = k de modo que $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$
Asíntota oblicua: y = mx + n
de modo que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

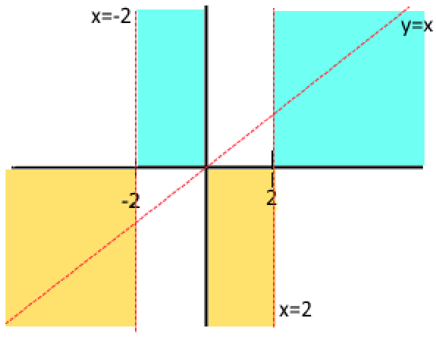
En el caso de cocientes de polinomios hay asíntotas horizontales si los grados del numerador y denominador son iguales; asíntotas oblicuas, si el grado del numerador supera en una unidad al del denominador; las asíntotas verticales son las rectas que pasan por los valores de x que no están en el dominio.

En nuestro ejemplo hay dos asíntotas verticales que son x = 2 y x = -2, puesto que
$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$

No hay asíntota horizontal, puesto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Hay una asíntota oblicua que es: y = x
Puesto que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-4} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

Dibujamos las asíntotas:



Crecimiento y extremos

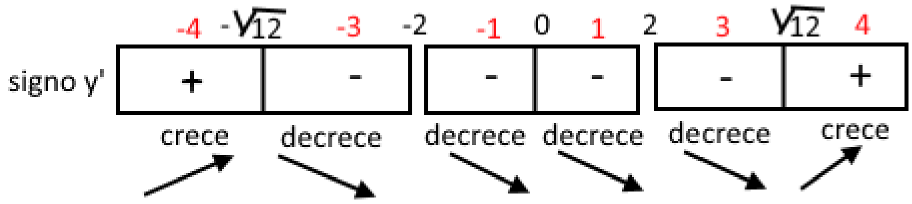
El proceso es análogo al estudio del signo de la función, pero ahora lo que se trata de estudiar es el signo de la función derivada que, según las proposiciones vistas anteriormente, determinará el crecimiento o decrecimiento dependiendo de si el signo es positivo o negativo respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

En primer lugar hay que ver donde la función derivada se anula. Esto es:

$$x^4 - 12x^2 = 0; \; x^2(x^2-12) = 0$$

Se anula para tres valores de x: $-\sqrt{12}\,, 0\,, -\sqrt{12}$

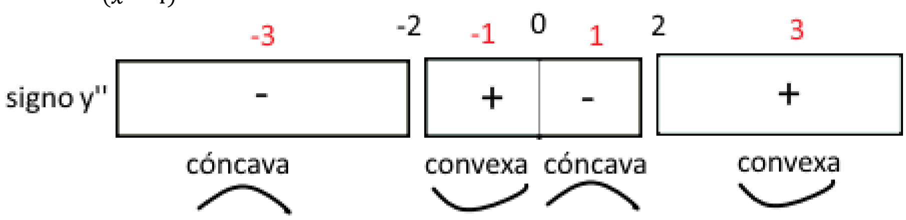


La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12})$ U $(\sqrt{12}, +\infty)$
Es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2)$ U (-2, 0) U (0 , 2) U $(2, \sqrt{12})$
Veamos donde cambia de creciente a decreciente o viceversa:
En $-\sqrt{12}$ presenta un máximo y en $\sqrt{12}$ un mínimo, cuyas imágenes respectivas, sustituidas en la función, son: $3\sqrt{3}$ y $-3\sqrt{3}$

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:

El proceso es análogo al estudio del signo de la función, pero ahora lo que se trata de estudiar es el signo de la función derivada segunda que, según las proposiciones vistas anteriormente, determinará la convexidad o concavidad dependiendo de si el signo es positivo o negativo respectivamente.

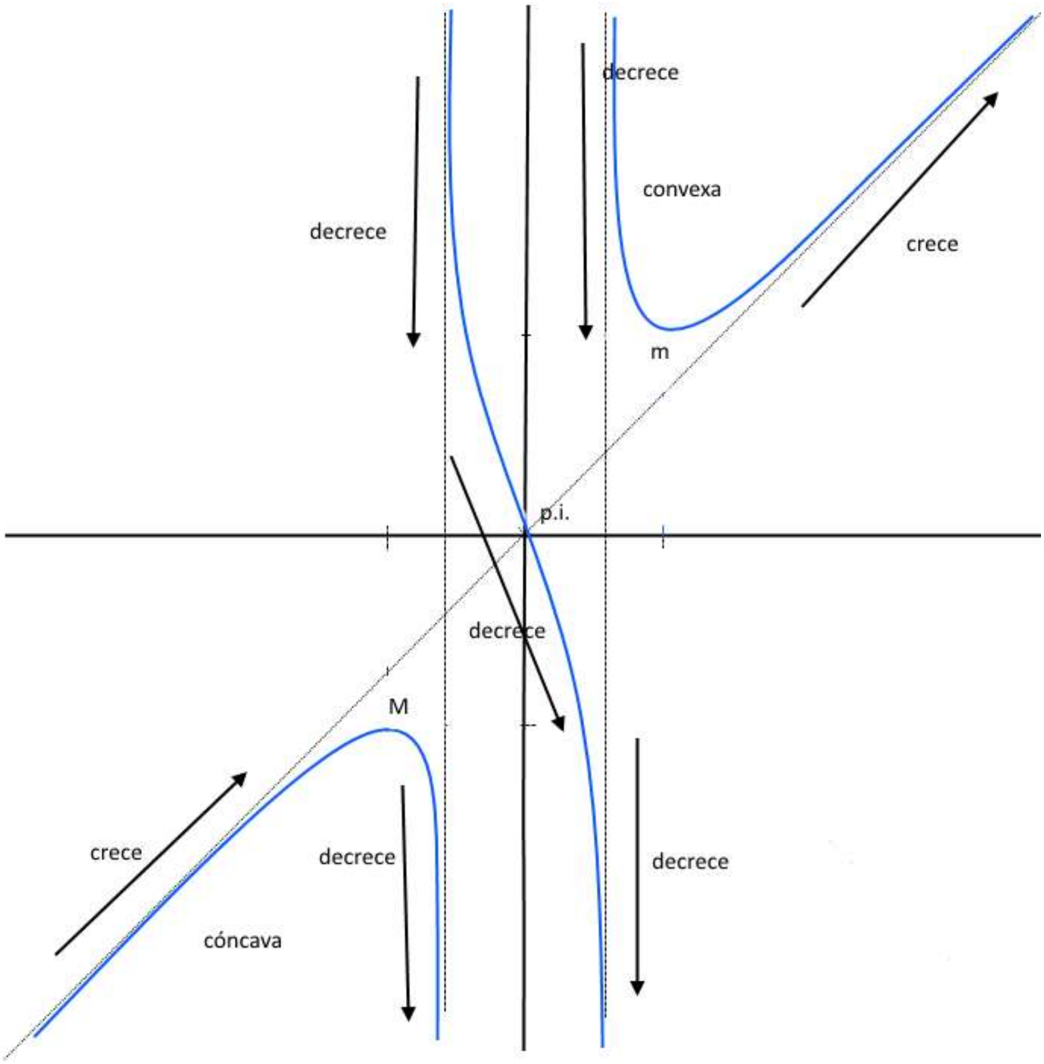
$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ que se anula para $x = 0$



La función es cóncava $(-\infty , -2)$ U (0 , 2)
La función es convexa (-2 , 0) U $(2 , +\infty)$

La función cambia de cóncava a convexa en x = -2 y en x=2, pero ambos puntos no están en el dominio, por tanto no hay puntos de inflexión.
Sin embargo cambia de convexa a cóncava en x= 0 y ahí hay un punto de inflexión
Punto de inflexión (0,0)

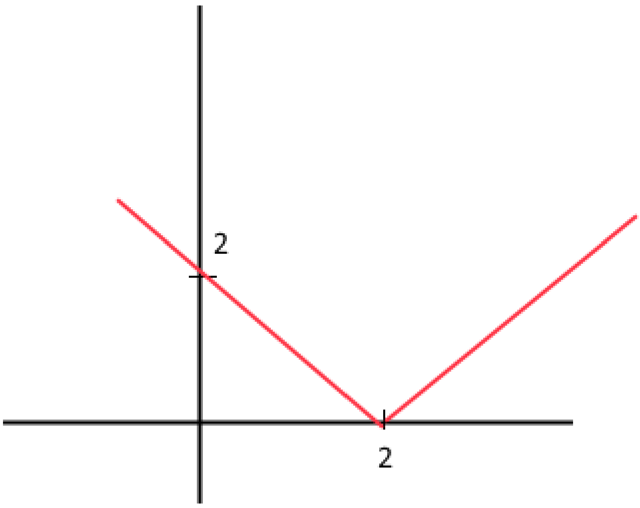
El resultado final, sería la siguiente gráfica en azul.



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Puede haber dos funciones distintas que tengan igual función derivada? Si la respuesta es afirmativa, ponga un ejemplo. Si, por el contrario es negativa razónela.
Calcular la derivada de la función f(x) = |x-2| en x = 2, si es posible. Represente la gráfica de la función y sobre ella razones su respuesta. (Santiago, septiembre 2001)

SOLUCIÓN:
En efecto puede haber dos funciónes distintas con igual función derivada. Ejemplos:
$F(x) = x^2$ y $G(x) = x^2 + 7$. Eso sí, siempre difieren en una constante.



Se observa que en x= 2 la función no es derivable por presentar pendiente negativa a la izquierda y pendiente positiva a la derecha sin que en x= 2 se igualen las pendientes de las rectas tangentes.
En otras palabras la derivada por la derecha y por la izquierda no coinciden.

f(x) = $\begin{cases} x-2 & x-2>0 \quad x>2 \\ 2-x & x-2<0 \quad x\leq 2 \end{cases}$ la función es continua en 2, pero no es derivable en 2, puesto que:

$f'_+(2)$= 1 y $f'_-(2)$= -1 Ambas no coinciden y por tanto no es derivable en x=2

2. Dada $F(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-4}$ escriba la ecuación de la secante a F que une los puntos (-2, F(-2)) y (2, F(2))
¿Existe un punto c en el intervalo [-2,2] verificando que la tangente a la gráfica de F en (c, F(c)) es paralela a la secante que halló? En caso afirmativo razone su respuesta y calcule c, en caso negativo razone por qué no existe. (Santiago, junio 2002)

SOLUCIÓN: Se trata de calcular la ecuación de la recta en el plano que pasa por los puntos (-2, -5/3) y (2, -1). El vector director es (4, 2/3) → (12, 2). La pendiente es 1/6
La ecuación pedida es y + 1 = 1/6 (x -2)

Teniendo en cuenta el teorema del valor medio del cálculo diferencial que dice:

Si f es continua en [a, b] y f es derivable en (a,b), entonces existe c$\in [a,b]$ verificando que f'(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En nuestro caso debemos ver si se verifican las hipótesis en el intervalo [-2,2]

F es continua en [-2, 2] porque la única discontinuidad la presenta en x=4$\notin [-2,2]$

F es derivable en (-2,2) puesto que F'(x) = $\frac{(2x-2)(x-4)-(x^2-2x+2)}{(x-4)^2} = \frac{x-2}{x-4}$ que no es derivable en x=4.

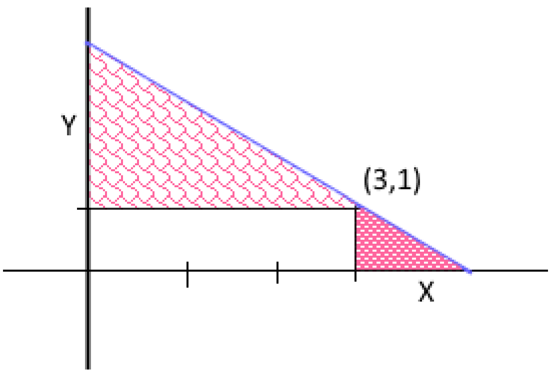
existe c$\in [a,b]$ verificando que f'(c) = 1/6 que coincide con la pendiente de la secante hallada.

$\frac{c-2}{c-4} = \frac{1}{6}$; 6c – 12 = c -4 ; 5c = 8; c = 8/5.

3. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,1) y tal que el área del triángulo formado por esta recta y los semiejes positivos de coordenadas sea mínima.

(Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:



La función que hay que hacer mínima es el área A(x,y) = (x+3)(y+1)/2

Para establecer la relación entre x e y, fijémonos que los dos triángulos rectángulos indicados en la figura son semejantes, con lo que se verifica:

$\frac{x}{3} = \frac{1}{y}$, de donde xy = 3; y = 3/x

Sustituimos la expresión de y en la función A(x, y) y nos queda A(x) = (x+3)($\frac{3}{x} + 1)/2$

A(x) =$\frac{3+\frac{9}{x}+x+3}{2}$ A'(x) = $\frac{\frac{-9}{x^2}+1}{2} = \frac{x^2-9}{2x^2}$ A'(x) se anula para x = 3 y x = -3. Descartamos la solución negativa porque no forma parte del dominio útil de la función. Por tanto la solución es x = 3 e y = 1. La recta que hace el aérea máxima corta a los ejes en los puntos (6,0) y (0,2). Su ecuación es y = -1/3 (x -6)

4. **Hallar la condición que debe cumplir a, para que el polinomio $x^4 + x^3 + ax^2$ sea cóncavo en algún intervalo. Determinar el intervalo de concavidad en función de a. (Santiago, junio 2003)**

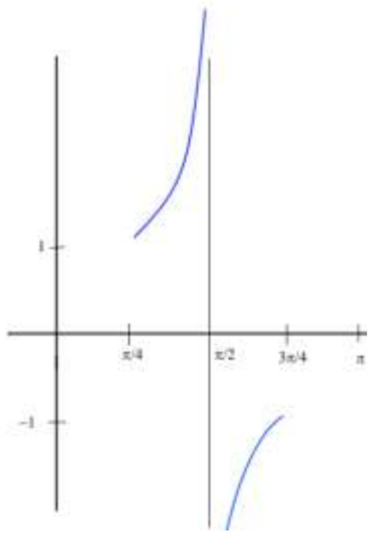
Hallamos la segunda derivada que es $12x^2+6x+2a < 0$

Obsérvese que es una parábola convexa, por lo que para que sea negativa en algún intervalo, ha de tener dos raíces reales, esto quiere decir que el discriminante

36 – 4.12.2a > 0 ; 36 – 96 a > 0; a < $\frac{36}{96} = \frac{3}{8}$

Una vez establecido el valor que ha de tener a para que la segunda derivada se anule en dos valores que son: $\frac{-3-\sqrt{6-16a}}{12}$ y $\frac{-3+\sqrt{6-16a}}{12}$. La función será cóncava en el intervalo de extremos esos valores.

5. ¿Se puede asegurar, empleando el teorema de Bolzano, que la función f(x) = tag (x) tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ¿ Razone la respuesta. Esboce la gráfica de f en ese intervalo. (Santiago, junio 2003)



La función tag (x) no verifica la hipótesis de continuidad en el intervalo dado, porque la tag (x) no es continua en $\frac{\pi}{2}$ que está en ese intervalo. Así pues no se puede asegurar.

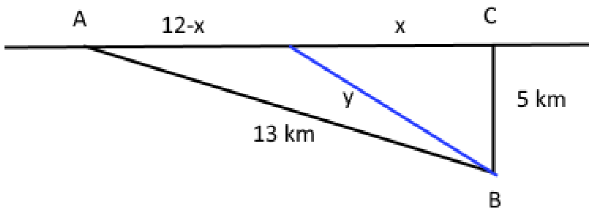
Como se observa en la gráfica, la función no es continua en $\pi/2$
Y además se ve como no corta al eje de las x.

6. Dada la parábola f(x) = ax^2 + bx + c, determine los valores de a, b y c sabiendo que f tiene un máximo en el punto de abscisa x = -1/2 y la recta tangente a f en el punto (1,3) es y = -3x + 6.

f'(x) = 2ax + b

f'(-1/2) = 0 ; -a +b = 0
f(1) = 3 ; a + b + c = 3 Resolviendo este sistema tenemos a = -1, b= -1, c = 5.
f'(1) = -3; 2a + b = -3

7. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible? (Santiago, junio 2004)



Por el teorema de Pitágoras, enseguida deducimos que la distancia entre A y C es 12.
La función que hay que minimizar es la función tiempo.
Al nadar 3 = y/t. De donde t = $\frac{y}{3}$
Sabemos que $y = \sqrt{x^2 + 25}$

Caminando 5 = 12-x/t'. De donde t' = $\frac{12-x}{5}$

Por tanto el tiempo invertido es t' + t = $\frac{12-x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{12-x}{5}+\frac{\sqrt{x^2+25}}{3}$. Derivando la función tiempo T'(x) = $\frac{-1}{5}+\frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}$ Igualando a 0. $\frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}=\frac{1}{5}$ 5x = $3\sqrt{x^2+25}$

$25x^2=9x^2+225$; $16x^2 = 225$ x = 15/4.
Por tanto la distancia de A a la que se tiene que arrojar al agua es 12 – 15/4 = 33/4 Km.

8. Calcular el $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)\sqrt{3n+5}$ indicando que tipo de indeterminación se presenta al intentar resolver este límite. (Santiago junio 2004)

La primera indeterminación que se presenta es ∞ - ∞ en la expresión $\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)$
Para evitarla, multiplico y divido por el conjugado de esa expresión:

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)\sqrt{3n+5}\,\frac{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\sqrt{3n+5}}{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}$ = Aquí surge la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Divido por n^2 numerador y denominador:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\sqrt{3n+5}}{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\sqrt{3+5/n}}{(\sqrt{1+7/n}+\sqrt{1})}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

9. Determinar las abscisas de los puntos de la curva $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 135º con el sentido positivo del eje de abscisas. (Santiago junio 2004)

Se trata de buscar en qué puntos, la pendiente de la tangente es tag 135º = -1
En otras palabras, la derivada vale -1.
Derivamos e igualamos: $x^2-2x-3=-1$ $x^2-2x-2=0$
La solución son $x=1\pm\sqrt{3}$

10. Estudiar la continuidad en toda la recta real de la función dada por
$f(x)=\begin{cases}\frac{sen(x)}{x} & si\ x>0\\ x+1 & si\ x\le 0\end{cases}$ **(Santiago, septiembre 2004)**

Sen(x)/x es continua en x>0 por ser cociente de funciones continuas en x>0.
X+1 es continua en x<0 por ser una recta.
Falta ver que ocurre en x = 0
f(0) = 1

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}x+1=1$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0+}\frac{cos(x)}{1}=1$$

Los límites laterales coinciden con la imagen en el punto, por tanto la función es continua en x = 0 y en particular en todo R.

11. Calcular la relación entre a y b para que sea continua en toda la recta real, la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2x} & si\ x\neq 0\\ b & si\ x=0\end{cases}}$$

El problema se reduce a estudiar la continuidad en x = 0, pues en el resto es continua (cociente de continuas y constante)

f(0) = b ; $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{ax}-1}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0-}\frac{ae^{ax}}{2}=\frac{a}{2}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{ax}-1}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0-}\frac{ae^{ax}}{2}=\frac{a}{2}$$

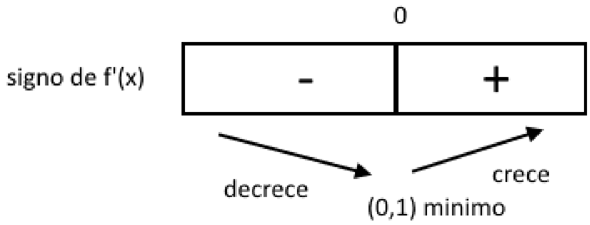
a/2 = b. a tiene que ser el doble de b.

12. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f(x)=(x+1)e^{-x}}$ en el punto de corte de f(x) con el eje OX.
Calcula, para dicha función, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad. (Santiago, junio 2006)

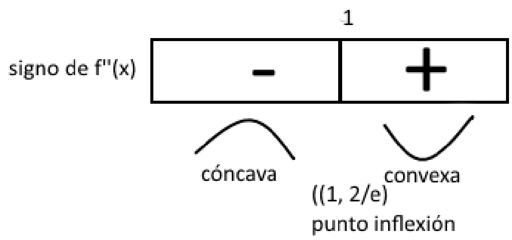
Primero estudiamos el punto de corte con el eje OX (y = 0): $(x+1)e^{-x}=0$; x = -1

Para averiguar la pendiente de la tangente tenemos que calcular la derivada de la función para x = -1; $f'(x)=-xe^{-x}$ $f'(-1)=e$
La ecuación de la recta tangente pedida es: $y=e(x+1)$

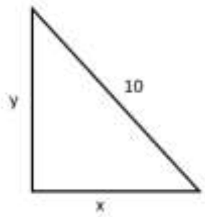
Para estudiar el crecimiento y extremos hay que estudiar el signo de la primera derivada en su dominio que es R. Primero vemos donde se anula la derivada (en x = 0)



Para la concavidad y convexidad estudiamos el signo en la segunda derivada.
$f''(x)=(x-1)e^{-x}$. Se anula en x = 1



13. De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10 cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima. (Santiago, junio 2006)



La función que hay que hacer máxima es A(x,y) = $\frac{xy}{2}$

La relación entre x e y viene determinada por el teorema de Pitágoras, es decir $y = \sqrt{100 - x^2}$

A(x) = $\frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$

A'(x) = $\frac{1}{2}.\frac{-4x^3+200x}{2\sqrt{100x^2-x^4}} = 0$; $-4x^3 + 200x = 0$; $x = 0\ y\ x = \sqrt{\frac{200}{4}}$. La solución x = 0 la descartamos por no formar parte del dominio útil del problema. Así pues la solución es x = $5\sqrt{2}$; y = $\sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$ = $5\sqrt{2}$

14. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$. Para esos valores de a y b, calcula: asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{cos^2x-1}$ (Santiago, septiembre 2006)

solución a) : Como el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ pertenece a la gráfica f(1/2) = 4; es decir que $\frac{a}{2} + 2b = 4$

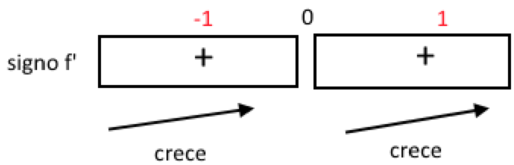
Como el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ es un mínimo f'(1/2) = 0; es decir que $a - 4b = 0$

De ambas ecuaciones resulta que a = 4 y b = -1

Asíntotas: Escribo la función así:

$f(x) = \frac{4x^2-1}{x}$. Verticales: x = 0; Horizontales no tiene; Oblicuas y = 4x

$f'(x) = \frac{4x^2+1}{x^2}$ No se anula:



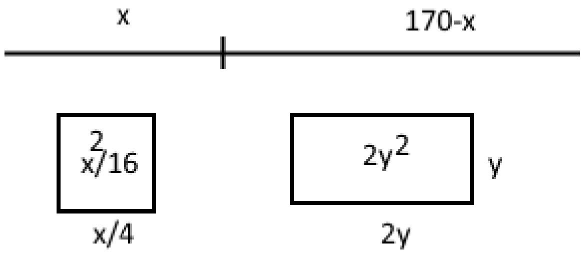
Creciente en todo el dominio

Solución b):

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{cos^2x-1} = \frac{0}{0}$ Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{cos^2x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x(x+2)}{-2cosx.senx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(x^2+4x+2)}{-2cos2x} = \frac{2}{-2} = -1$$

15. Un alambre de 170 cm. De longitud se divide en dos partes. Con una de las partes se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de modo que la base mida el doble que la altura. Calcular las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las areas del cuadrado y del rectángulo sea mínima. (Santiago, septiembre 2006)



$6y = 170 - x; \quad y = \frac{170-x}{6}$

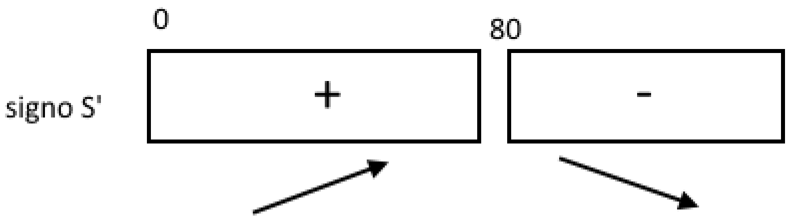
Area cuadrado: $\frac{x^2}{16}$

Area rectángulo $\frac{(170-x)^2}{18}$

La Suma de las áreas S (x) = $\frac{x^2}{16} + \frac{(170-x)^2}{18}$

S'(x) = $\frac{x}{8} + \frac{-(170-x)}{9} = 0$; $9x - 8(170-x) = 0$; $x = 80$

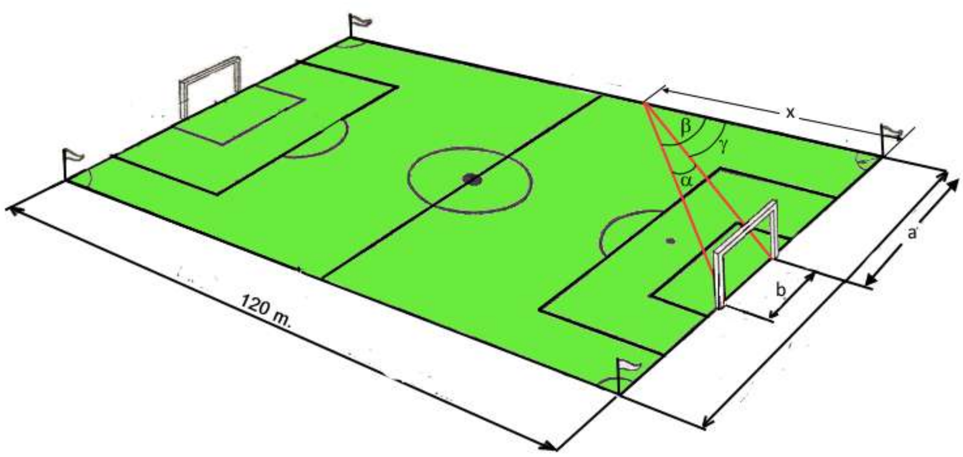
Hay que dividir el alambre en dos trozos, uno de 80 y el otro de 90 cm



En efecto

Hay un máximo para x = 80 en la función "Suma de áreas".

16. Un futbolista corre la banda izquierda. Averiguar desde que punto de la banda tiene el mayor ángulo posible de disparo a portería.



El ángulo de disparo a portería es α

$$tg\,\beta = \frac{a+b}{x};\, tg\gamma = \frac{a}{x}$$

$$tg\alpha = tg(\beta - \gamma) = \frac{tg\beta - tg\gamma}{1 + tg\beta.tg\gamma} = \frac{bx}{x^2 + a^2 + ab}$$

$$\alpha = arc\;tg\,\frac{bx}{x^2 + a^2 + ab}$$

Que es la función a hacer máxima. Derivando dicha función se obtiene:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{bx}{x^2 + a^2 + ab}\right)^2} . \frac{b(x^2 + a^2 + ab) - 2bx^2}{(x^2 + a^2 + ab)^2} = 0$$

$$b(x^2 + a^2 + ab) - 2bx^2 = 0;\; -bx^2 + ba^2 + ab^2 = 0;\; b(-x^2 + a^2 + ab) = 0$$

Puesto que $b \neq 0, -x^2 + a^2 + ab = 0;\; x = \sqrt{a^2 + ab}$

Supongamos un campo con las medidas reglamentarias siguientes: largo 120; ancho 90 y la portería 7,32 m.

En este caso a = $\frac{90}{2} - \frac{7'32}{2} = \frac{82,68}{2}$= 41,34 m. b = 7,32

El punto desde la banda en el que el ángulo de visión de portería es máximo es a una distancia de la esquina igual a x = 44,85 m, siendo el ángulo zona de disparo 4,66º

EJERCICIOS PROPUESTOS

(Soluciones en la página 117)

Ejercicio 1.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & si \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & si\; x\geq 2 \end{cases}$

a) Calcula a para que f(x) sea continua en x = 2. Para el valor obtenido de a, ¿es f(x) derivable en x = 2?

b) Dada g(x) = ax^4 + bx + c, calcula los valores de a, b y c para que g(x) tenga en el punto (1, -1) un mínimo relativo, y la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0, sea paralela a la recta y = 4x. (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 2.-

a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Dada la función f(x) = x^3 -9x, calcula para f(x): puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 3.-

a) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{e^x senx-x}{2x^2+x^4}$

b) Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base esté sobre el eje OX y los vértices del lado opuesto estén sobre la parábola y = $-x^2$ + 12 (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 4.

a) Enunciado del teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de $f(x)=\ x^5+2x^4-4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo (1, 2)?

b) Dada la función $g(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\leq -\sqrt{2} \\ -x^2+2 & si\; x>-\sqrt{2} \end{cases}$. Es g continua en x = $-\sqrt{2}$? (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 5.

a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Sea f(x) = $e^x(2x-1)$. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=0

Ejercicio 6

a) Calcula a, b, c , para que $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \;\; x\leq 0 \\ x+\ln(1+x^2) & si\; x>0 \end{cases}$ sea continua y derivable en R y tenga un extremo relativo en x = -2

b) Sea $g(x)=x(x-1), 0\leq x\leq 2$. Razona si g(x) tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo [0,2]. En caso afirmativo, calcúlalos. (Santiago, septiembre, 2008)

Ejercicio 7 Calcula el valor de m para que $\lim_{x\to 0}\frac{mx^2-1+cosx}{sen(x^2)}=0$ (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 8.-

a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \frac{Ln(1+x^2)}{x}$ en x = 0

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

Ejercicio 9.

a) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

b) Calcula un punto de la gráfica de la función $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ en el que la recta tangente sea paralela al eje OX, escribe la ecuación de esa recta tangente. Calcula las asíntotas, si las tiene, de g(x).

Ejercicio 10.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ en el punto de abscisa x = 0.

b) Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 11.

a) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema de Bolzano. Dada la función $f(x) = e^x + 3xLn(1 + x^2)$, justifica si podemos asegurar que su gráfica corta al eje OX en algún punto del intervalo [-1,0]

b) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax + b & si\ x \le 0 \\ sen(2x) + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Sea continua y derivable en x = 0. (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 12. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 13.

a) Define función continua en un punto. ¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable? ¿Para qué valores de k, la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2+k}$ es continua en todos los puntos de la recta real?

b) Determina los valores de a, b, c, d para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0,4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0). (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 14.

a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Calcula: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2cosx}{sen(x^2)}$ (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 15. -

Dibuja la gráfica de $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 16.-

a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=x^3-kx+10$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de f(x).

b) Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 17.- En una circunferencia de radio 10 cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (región sombreada)? (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 18.-

Define función derivable en un punto. Calcula si existen, los valores de a y b, para que sea derivable la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{e^x} & si\ x<0\\ x^2+ax+b & si\ x\geq 0\end{cases}$ (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 19.-

a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x)=3sen\left(\frac{x}{2}\right)-\cos(x^2)$ corta al eje de las X en algún punto del intervalo (0,π)? Razona la respuesta.

b) Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Cuánto vale ese producto? (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 20.- Calcula los valores de a, b, c, sabiendo que y = ax^2 +bx +1 e y = x^3 + c, tienen la misma recta tangente en el punto (1,2). (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 21.-

a) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)=x^4-8x^2+1$. Calcula también el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [-3,3]

b) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^2+\ bxlnx$ tenga un punto de inflexión en el punto (1, 2). Para estos valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 22.-

a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que la función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo [1,2]. ¿Puede cortarlo en más de un punto?

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 23.-

a) Determina los valores de a para que la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Sea continua. ¿Es derivable en x = 1 para algún valor de a?

b) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial. (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 24.-

Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ (Santiago, septiembre 2012)

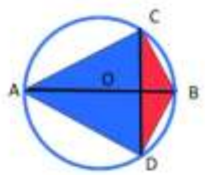
Ejercicio 25.-

a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Tiene la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ alguna solución en el intervalo (0, 1)? ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de a y b para que $\lim_{x\to o}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$ (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 26.- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$. (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 27.- En una circunferencia de centro O y radio 10 cm, se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima? (Santiago, junio 2013)

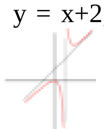


Ejercicio 28.- Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 + ax - 1$ en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula un punto c en (0,1), en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) sea paralela al eje OX (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 29.-

Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimieno y los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$ (Santiago , septiembre 2013)

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1) a) a = ½. No es derivable en x = 2. b) a = -1, b = 4, c = -4
2) Corta a los ejes en (-3,0), (0,0) y (3.0). Creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Máximo relativo en el punto $(-\sqrt{3}, 12\sqrt{3})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. Cóncava en el intervalo (-∞, 0) y convexa en (o, +∞). Punto de inflexión en (0,0).
3) a) ½. b) (2,0), (-2,0), (2,8), (-2,8)
4) a) Sí. b) Sí.
5) b) Decrece en $(-\infty, -1/2)$ y crece en $(-1/2, +\infty)$. y = x – 1
6) a) a = ¼, b = 1, c = 0; b) Tiene un máximo absoluto en (2,2) y un mínimo absoluto en (1/2, -1/4).
7) ½.
8) a) Evitable. b) Crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, decrece en (0, 1). Máximo relativo en (0,0), mínimo relativo en (1, -1). Cóncava en $(-\infty, 1/2)$ y convexa en (1/2, +∞). Punto inf. (1/2, -1/2)
9) b) (0, ¼), y = ¼. Asíntota: y = 0.
10) a) y = x +1. b) Dominio R-{-1,1}; Crece en $(-\infty, -1) \cup (-1,0)$, decrece en $(0,1) \cup (1, +\infty)$, Máximo relativo en (0,1), asíntotas: x = 1, x = -1, y = 1.
11) Sí. b) a = 2, b = 1
12) Dominio: R-{-1}, Creciente en todo el dominio, no extremos. Cónvexa si x<-1, cóncava si x>-1,
 asíntotas: x = -1, y = x+2
13) a) Es continua para todo k>0. b) a = 1, b = -3, c = 0, d = 4.
14) b) 2.
15) Dominio R –{2}. Cortes ejes (0,0); asíntotas: y = x+2, x = 2; máximo (0,0), mínimo (4, 8). Cóncava si x <2, convexa si x>2. Gráfica:

16) a) k = 4. b) Dom g = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(1, +\infty)$.
17) 5 y 5.
18) a = -2, b = 1.
19) a) Sí. b) 24 y 16; 3538944.
20) a = 2, b = -1, c = 1.
21) a) Relativos: mínimos en (-2,-15), (2,-15) que también son absolutos en [-3,3]. Máximo relativo (0,1). Máximos absolutos en [-3,3], (-3,10) y (3,10). b) a = 2, b = -4. Dom: $(0, +\infty)$, cóncava en (0,1) y convexa en (1, +∞).
22) a) Sí. No tiene más raíces (combinarlo con Rolle); b) 1/e.
23) a) Continua para a = 2 o a = -1. No es derivable en ningún caso en x = 1.
24) Asíntotas: y = 1. Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en (-1,1).
25) a) Sí. No tiene más de un corte. b) a = 3, b = 2.
26) Creciente en el int $(-\infty, 2/3) \cup (2, +\infty)$. Decreciente en el int. (2/3, 2). Cóncava en $(-\infty, 4/3)$, convexa en $(4/3, +\infty)$.
27) $5\sqrt{2}$ cm.
28) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
29) Dominio: R; asíntotas: y = 0; int. crecimiento: (-5/2,2); int. decrec: $(-\infty, -5/2) \cup (2, +\infty)$. Mínimo relativo: $\left(\frac{-5}{2}, \frac{-4}{e^6\sqrt[4]{e}}\right)$, máximo relativo: $\left(2, \frac{5}{e^4}\right)$

TEMA **VI**
CÁLCULO INTEGRAL

Definición.- Sea f(x) una función real de variable real. Se llama primitiva de f(x) a una función F(x), de modo que F'(x) = f(x)

Las primitivas de una misma función difieren en una constante
Si F(x) y G(x) son ambas primitivas de f(x), por definición F'(x) = G'(x) = f(x)
Por tanto F'(x) – G'(x) = 0 , (F-G)'(x) = 0, (F-G)(x) = k ; F(x) – G(x) = k.

Definición.- Al conjunto de primitivas de una función f(x) se le denomina integral indefinida de f(x) y se representa así:

$\int f(x)dx = F(x) + k$ siendo F(x) una primitiva de f(x)

Ejemplo: $\int 1dx = x + k$; $\int 2xdx = x^2 + k$; $\int e^x dx = e^x + k$; $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+k

Propiedades de la integral indefinida:

$$\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx$$
$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Métodos de integración:

Inmediatas: Consiste en aplicar las reglas de derivación en sentido inverso.

Cambio de variable.- Pretende transformar una integral compleja en otra inmediata mediante un cambio de variable.

$\int 2x.sen(3x^2 + 4)dx$ hacemos el cambio t = $3x^2$+4 y derivamos ambos miembros:
dt = 6x dx; de donde dx = dt/6x
Vamos a la integral original y sustituimos: $\int 2x.sent\frac{dt}{6x} = \int \frac{sent}{3}dt = \frac{1}{3}\int sent\ dt = \frac{-1}{3}cost$; finalmente se deshace el cambio de variable y queda el resultado final que sería: $\frac{-1}{3}\cos(3x^2 + 4) + k$

¿Cómo se puede saber cuándo una integral puede hacerse mediante un cambio de variable y que cambio de variable debe efectuarse?
La pregunta no tiene una respuesta global, pero en muchas ocasiones se detecta que funciona el cambio de variable cuando en la expresión a integrar figuran una función y su derivada multiplicando (salvo constantes). En este caso se debe llamar t a la función cuya derivada aparece multiplicando.
En el ejemplo anterior figuraba 2x multiplicando y la derivada de $3x^2$+4 es 6x. Como vemos se diferencias en las constantes.

Veamos otro ejemplo: $\int \frac{\ln x}{x} dx$. Obsérvese que en la expresión aparece la función lnx y su derivada 1/x multiplicando. Por lo tanto, siguiendo el criterio anterior, hacemos t = lnx ; derivamos dt = 1/x dx , dx = x.dt
Sustituyendo en la integral:
$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{t}{x} x dt = \int t \ dt = \frac{t^2}{2}$, deshaciendo el cambio $\frac{\ln^2 x}{2} + k$

Método de integración por partes:

Cuando calculamos la integral de un producto y no se puede aplicar el criterio del cambio de variable, podemos intentar el método de integración por partes que consiste en lo siguiente:

$$\int f(x).g(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Siendo u(x) = f(x) dv(x) = g(x)

La elección de u se hace siguiendo una regla mnemotécnica que viene dada por la expresión LIATE; L de logaritmo, I de inversa (funciones arco), A de algebraica (funciones polinómicas), T de trigonométrica y E de exponencial, en este orden.

Veamos un ejemplo:

$$\int x.lnx\ dx$$

u(x) = lnx ; dv(x) = x du (x) = 1/x v(x) = $x^2/2$

$$\int x.lnx\ dx = \frac{x^2}{2} lnx - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{x^2}{4} + k$$

Es posible que el proceso por partes deba ser reiterado, por ejemplo:

$$\int x^2.senx\ dx$$

u(x) = x^2 dv(x) = sen x ; du(x) = 2x v(x) = -cosx
$\int x^2.senx\ dx = -x^2 cosx - \int -2xcosx\ dx$ Esta última integral también debe ser hecha por partes, por lo que hay que reiterar el proceso:

$$\int -2xcosx\ dx = -2xsenx - \int -2senx\ dx = -2xsenx - 2cosx + k$$

u(x) = -2x dv(x) = cosx du(x) = -2 v(x) = senx.

En consecuencia:
$\int x^2.senx\ dx = -x^2cosx - \int -2xcosx\ dx = -x^2cosx + 2xsenx + 2cosx + k$

Dentro de las integrales por partes, están unas particulares denominadas “que se muerden la cola”, porque en el desarrollo de la integral se llega a obtener la integral de la misma expresión, por ejemplo:

$$\int e^x.senx\,dx = e^x.senx - \int e^x cosx\,dx = e^x.senx - [\,e^x cosx + \int e^x.senx\,dx] = e^x(senx - cosx) - \int e^x.senx\,dx$$

Vemos que llegamos a la integral de partida. Basta pasarla al primer miembro y obtenemos:

$$2\int e^x.senx\,dx = e^x(senx - cosx)$$

De donde

$$\int e^x.senx\,dx = \frac{e^x(senx - cosx)}{2} + k$$

Método Escalante de integración por partes. (Curiosidad matemática)

Un método más heterodoxo[6], pero que también da un resultado exacto, es el siguiente: Se establece una tabla con tres columnas, donde la primera de ellas está constituida por signos que se van alternando comenzando por +, en la segunda y tercera columnas se consignan las funciones f(x) y g(x) respectivamente. (la elección de f y g no es arbitraria, va a depender del tipo de función que sea cada una de ellas). En la segunda columna se van derivando las funciones de la fila inmediatamente superior y en la tercera se van obteniendo las primitivas de las funciones, sin constante de integración, de las funciones de la fila inmediatamente superior. El resultado final de la integral es el producto de las funciones obtenidas en la segunda columna de la fila 1 y la tercera columna de la fila 2 precedidas del signo de la primera columna de la fila 1, menos (signo - de la segunda fila) la integral del producto de las funciones obtenidas en la siguiente fila. Si esta última integral es inmediata o hay que resolverla por otro método que no sea por partes, el algoritmo finaliza, y se procede a su cálculo. Si por el contrario esta última integral debe seguir haciéndose por partes, el algoritmo continúa hasta finalizar como hemos dicho.

Veamos cuatro ejemplos para ilustrar el método:

$\int x.e^x dx$ $\int arctgx dx$ $\int senx.\cos x dx$ $\int x^2.\cos x dx$

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	x	e^x
–	1	e^x

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	arctgx	1
–	$\frac{1}{1+x^2}$	x

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	senx	cosx
–	cosx	senx

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	x^2	senx
–	2x	-cosx
+	2	-senx

[6] Este método se explica en la película "Lecciones inolvidables" basada en la vida del profesor mejicano Jaime Escalante que daba clases en centros marginales de Estados Unidos. Sus alumnos obtenían unos resultados excelentes en las pruebas de acceso de la Universidad. (La película se encuentra en la videoteca del Instituto)

Obsérvese que en la primera el resultado es x.e^x - $\int e^x dx$, finalizando el proceso pues la integral $\int e^x dx = e^x + k$ es inmediata.

En el segundo caso el resultado que se obtiene según el método de Escalante es $x.arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$ finalizando el proceso pues la integral que surge $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ es inmediata o se obtiene mediante un sencillo cambio de variable.

La tercera integral, $\int senx.\cos xdx = sen^2 x - \int senx.\cos xdx$, finaliza aquí pues es del tipo de las integrales cíclicas, obteniéndose que $2\int senx.\cos xdx = sen^2 x + k$, de donde $\int senx.\cos xdx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

Sin embargo, el cuarto caso necesita un paso más, pues, procediendo según este método tenemos: $\int x^2 senxdx = -x^2 \cos x + \int 2x.\cos xdx$, pero obsérvese que $\int 2x.\cos xdx$, requiere ser resuelta también por el método de partes, pues no es inmediata, ni sirve cambio de variable alguno, por lo que el método continúa multiplicando en diagonal, es decir: $\int x^2 senxdx = -x^2 \cos x + 2x.senx - \int 2senxdx$, donde se acaba el algoritmo pues. $\int 2senxdx$ es inmediata: -2cosx.

Así pues, el resultado final sería $\int x^2 senxdx = -x^2 \cos x + 2x.senx + 2\cos x + K$

Integrales de funciones racionales

A continuación integraremos funciones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo P y Q sendos polinomios de grado m y n respectivamente.

Estudiemos los casos:

a) m < n

En este caso se descompone el denominador en factores mediante el cálculo de las raíces que pueden ser simples o múltiples.
En el caso de raíces simples se utiliza el *método de los coeficientes indeterminados* y el resultado de la integral van a ser sumas de logaritmos.

Ejemplo: $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}dx = Aln|x-2| + Bln|x-3| + k$

¿Cómo calcular A y B? $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$; A(x-3)+B(x-2) = x+3

Para x=3; 6 = B; Para x = 2; A = -5

La solución es: -5ln|x-2|+6ln|x-3| + k

Si en las raíces hubiese alguna múltiple, aparecerían logaritmos (para las simples) y potencias para las múltiples.

Ejemplo: $\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}dx = Aln|x-1| - \frac{B}{x-1} + k$

Para hallar A y B $\frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$ x+3 = A(x-1) + B
Para x=1; B=4; para x= 0 3 = A + B; A = -1
La solución final es:

$$-ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + k$$

b) m ≥ n
En este caso se puede realizar la división de polinominos P(x):Q(x), obteniendo un cociente C(x) y un resto R(x), de modo que el grado del resto es menos que el del divisor, Q(x).

De la división se desprende que P(x) = C(x).Q(x) + R(x); dividiendo por Q(x), tengo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

En consecuencia

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$$

C(x) es un polinomio, cuya integral es inmediata, y $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ es del tipo del apartado a)

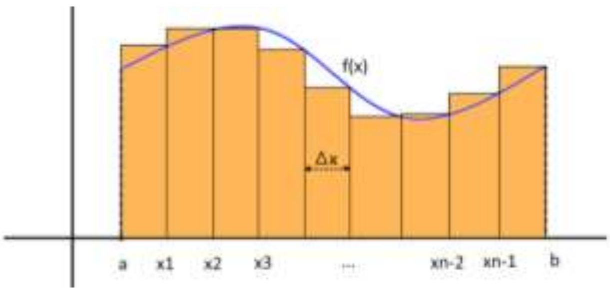
Integral definida en un intervalo [a,b]

Suma de Riemann
Dado un intervalo de ℝ [a, b] y dado un número natural n > 0, definimos $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Dividimos el intervalo en n subintervalos $[x_{i-1}, \quad x_i]$ tales que $x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, de modo que $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, garantizando de este modo que los subintervalos sean iguales.

Definición. Sea f una función continua en un intervalo [a, b] sobre el que establecemos una partición $x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Se llama Suma de Riemann de la función f en el intervalo [a, b] relativa a la partición P, a:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Que es el resultado de la suma de los n rectángulos de base Δx y altura calculada en la imagen del extremo superior del intervalo[7] $[x_{i-1}, \quad x_i]$ mediante la función f.



[7] La altura de los rectángulos puede obtenerse en cualquier punto x_i^* del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

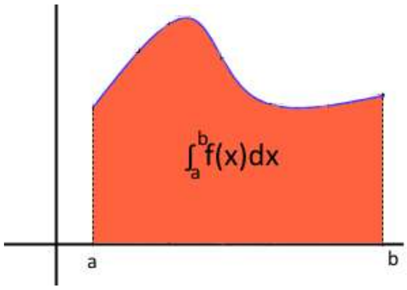
Resulta evidente que si hacemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Se obtiene el área encerrada bajo la curva que determina f(x), el eje OX y las rectas $x = a, x = b.$[8]

Ese valor se denomina integral definida de f(x) de extremos a y b y se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$



Propiedades de la integral definida

$$\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

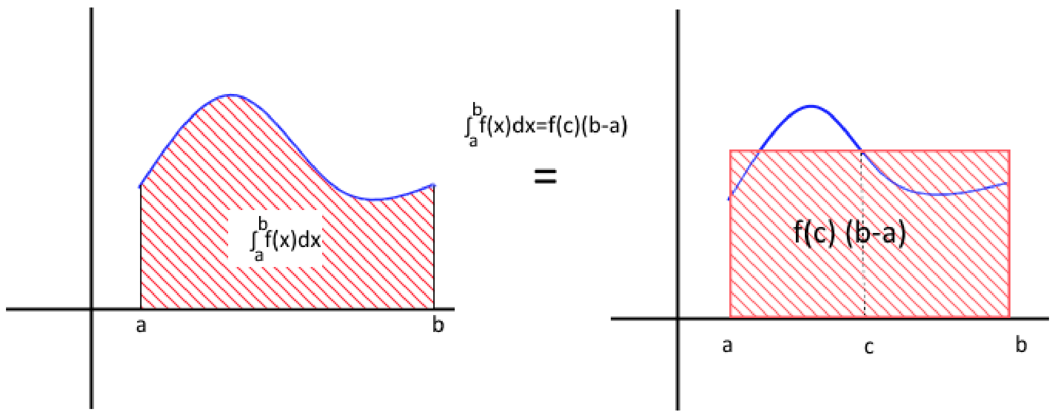
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Teorema del valor medio del cálculo integral:

Sea f continua en [a,b], existe un punto c$\in [a,b]$ / $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Su interpretación geométrica es la siguiente:

[8] Téngase en cuenta que x_i = a + i.Δx, por lo que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\text{a} + \text{i}.\Delta\text{x})$

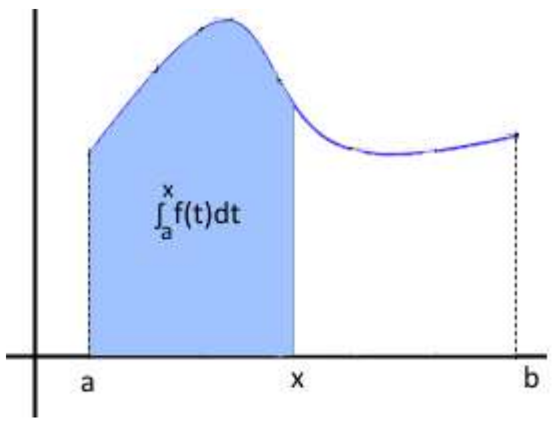


Podemos siempre encontrar un rectángulo de base b-a y altura f(c), cuya área coincide con la que limita la curva con el eje OX.

Función área:

Sea f una función continua en el intervalo [a, b] y definimos la siguiente función:

$F: [a,b] \quad \rightarrow \quad R$ de modo que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Esta función se llama función área y es continua en [a,b]



Según la definición

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es una función continua en [a, b] y F es la función área definida sobre f, entonces se verifica que: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ siendo F derivable en x.

Cálculo de la integral definida. Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ siendo F una primitiva de f}$$

Ejemplo:

$$\int_{1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas

Sabiendo que si f(x) > 0 en todo x del intervalo [a, b] y continua
El área que encierra la gráfica de f, las rectas x=a y x=b con el eje OY, era precisamente $\int_a^b f(x)dx$ como ya hemos visto en la interpretación geométrica de la integral definida.
A partir de este hecho podemos averiguar cualquier área delimitada por un perímetro dado por funciones.

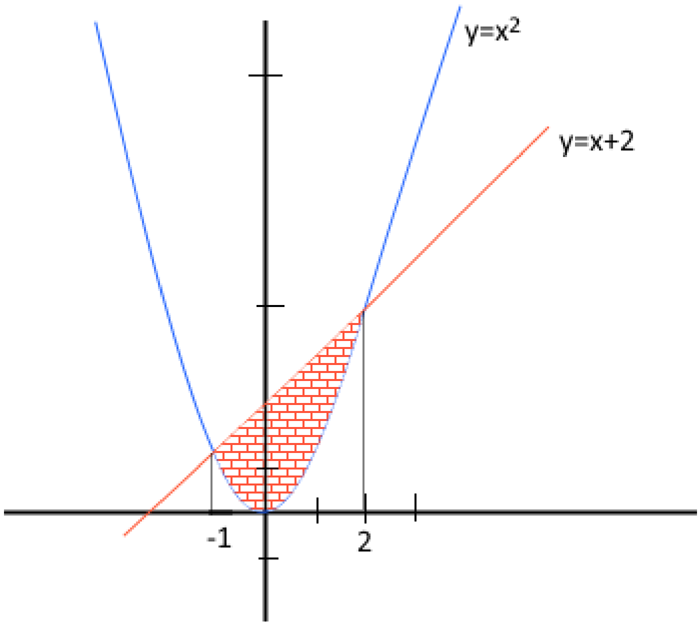
Si el área viene delimitada por dos funciones f y g (se cortan en dos puntos), el área va a ser
$\int_a^b f(x) - g(x)dx$ donde a y b son las abscisas de los puntos de corte y f(x) > g(x) $\forall x \in [a, b]$
(La integral de la función que limita por encima menos la que limita por debajo)

En caso de haber más de dos funciones, conviene realizar el dibujo de las mismas y descomponer en áreas delimitadas por dos funciones y aplicar el criterio anterior:

Ejemplos:

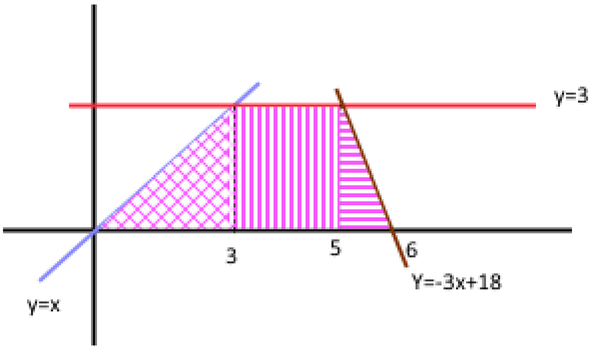
Calcular el área limitada por las funciones $y = x^2$ e $y = x + 2$
Estudiamos los puntos de corte de ambas funciones: $x^2 = x + 2$, $x^2 - x - 2 = 0$
Se cortan en los puntos de abscisas -1 y 2.
Para saber cual está por encima entre -1 y 2, tomamos un punto intermedio 0 y lo sustituimos en ambas funciones. Donde nos dé el valor más alto determinará la función que está por encima: Así $0^2 = 0$ y $0+2 = 2$ Por tanto entre -1 y 2 la función y = x+2 está por encima de la función $y = x^2$
El área buscada será:

$$\int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{4}{3} + \frac{7}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5\ u^2$$



Con más de una función:

Hallar el área limitada por las funciones y = x;   y = 3; y = -x+5   y el eje OX



Area buscada es:

$$\int_0^3 x\,dx + \int_3^5 3\,dx + \int_5^6 -3x + 18\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + [3x]_3^5 + [-3x^2 + 18x]_5^6 =$$
$$\frac{9}{2} + 15 - 9 + 5 = \frac{31}{2} = 15{,}5\ u^2$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1.Sabiendo que P(x) es un polinomio de tercer grado con un punto de inflexión en (1.0) y con P'''(1) = 24 donde, además, la tangente al polinomio en ese punto es horizontal, calcular $\int_{-1}^{0} P(x)dx$ (Santiago, junio 2001)

SOLUCIÓN:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $P''(x) = 6ax + 2b$. $P'''(x) = 6a$
Sabemos que P(1) = 0 por ser (1,0) un punto de su gráfica. P'(1) = 0 por ser la tangente horizontal y por tanto la pendiente (derivada) nula. P''(1) = 0 por presentar un punto de inflexión y P'''(1) = 24. De esas tres igualdades, resultan las cuatro ecuaciones siguientes:
0 = a + b + c+ d ; 3a + 2b + c = 0 ; 6a + 2b = 0 y 6a = 24. De donde a = 4, b = -12, c = 12, d= -4. Una vez hallado el polinomio que es $4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$

$$\int_{-1}^{0}(4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)dx = [x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x]_{-1}^{0} = -15$$

2. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$, calcular $\int_{-1}^{0} x^2(gof)(x)dx$ (Santiago, junio 2001)

SOLUCIÓN:
Hay que ver cuando f(x) es positiva o no positiva: A la vista de f(x) es una función siempre positiva o nula puesto que $f(x) = \frac{x-|x|}{2} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ x & x \le 0 \end{cases}$

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 3f(x) & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 3x & x \le 0 \end{cases}$$

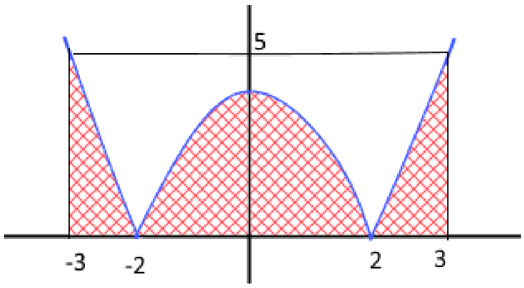
$$\int_{-1}^{0} x^2(gof)(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 3x dx = \int_{-1}^{0} 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -3/4$$

3**. Sean f y g, dos funciones continuas definidas en el intervalo [a, b], que verifican que $\int_a^b f = \int_a^b g$ Demostrar que existen m, n ∈ $[a, b]$ tales que f(m) = g(n) (Santiago, septiembre 2001)**

SOLUCIÓN:

Aplicamos el teorema del valor medio a ambas funciones.
Existe m en [a,b] de modo que $\int_a^b f = \int_a^b f = f(m)(b-a)$
Existe n en [a,b] de modo que $\int_a^b g = g(n)(b-a)$
Por ser iguales, tenemos que $f(m)(b-a)$ = *g(n) (b-a) de donde f(m) = g(n)*

4- Dibuje la gráfica de f(x) = |x²-4| en el intervalo [-3,3] y calcule su integral en ese intervalo.

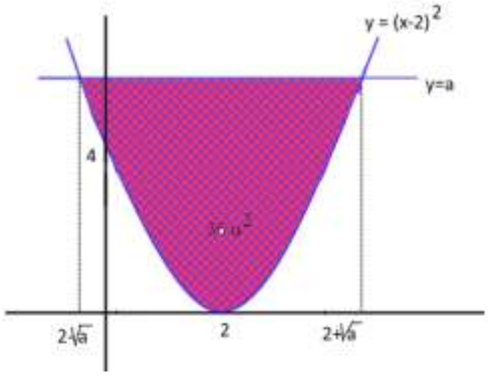


$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & si\ x \notin [-2,2] \\ -x^2+4 & si\ x \in [-2,2] \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{3} |x^2-4|dx = 2\int_{-3}^{0} |x^2-4|dx = 2\int_{.3}^{-2} x^2-4\,dx + 2\int_{-2}^{0} -x^2+4\,dx =$$

$$2\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-3}^{-2} + 2\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{0} = 2\left(\frac{-8}{3}+8+9-12\right)+2\left(\frac{-8}{3}+8\right) = \frac{46}{3}u^2$$

5. **Calcular el número positivo a, tal que el valor del area de la región limitada por la recta y = a y la parábola y = (x-2)^2 sea 36. (Santiago, septiembre 2002)**
SOLUCIÓN:



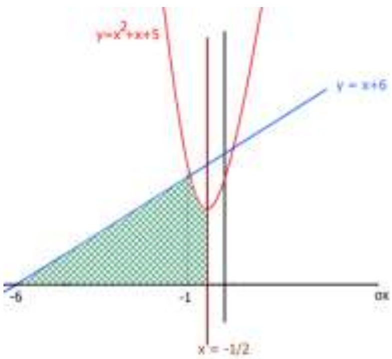
$$\int_{2-\sqrt{a}}^{2+\sqrt{a}} (a-(x-2)^2)dx = 36$$

$$\left[ax - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_{2-\sqrt{a}}^{2+\sqrt{a}} = 36$$

$$\left(2a + a\sqrt{a} - \frac{(2+\sqrt{a}-2)^3}{3}\right) - \left(2a - a\sqrt{a} - \frac{(2-\sqrt{a}-2)^3}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$\frac{4a\sqrt{a}}{3} = 36$; $4a\sqrt{a} = 108$; $a\sqrt{a} = 27$; $a^{\frac{3}{2}} = 27$; $a^3 = 27^2 = 3^6$; a = 9

6. **Determinar el área de la región limitada por la gráfica de la función *f(x)* = *x*^{2} +*x*+*5*, el eje OX y las rectas *x* = -1/2 e y = *x*+6 (Santiago, septiembre 2003)**



Los puntos de corte de la reza y = x+6 con la parábola y = x^2 +x+5 se obtiene igualando x^2 +x+5= x+6; de donde x = -1, 1. Solo nos interesa el valor -1.
Y el punto de corte de y = x+6 con el eje OX se produce obviamente para x = -6.

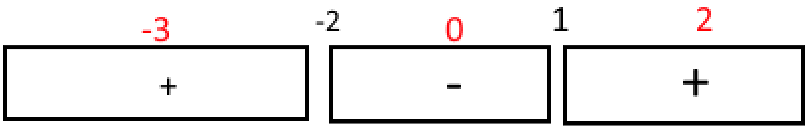
Ya tenemos los límites de integración y determinada una función por encima y otra por debajo. Por tanto el área pedida es:

$$\int_{-6}^{-1}(x+6)dx+\int_{-1}^{-1/2}(x^2+x+5)dx=\left[\frac{(x+6)^2}{2}\right]_{-6}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{-1/2}$$

$$=\left(\frac{25}{2}-0\right)+\left(\frac{-1}{24}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}-5\right)=\frac{179}{12}u^2$$

7. Demostrar que la función f, dada por $f(x)=\frac{4}{x^2+x-2}$ es estrictamente positiva en (2, +∞) y hallar el área de la región determinada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 2 y x= 3. (Santiago

El dominio de la función f(x) es R –{-2, 1} y no se anula para ningún valor de x.
Por tanto, el signo de esa función es:



La función es positiva en (-∞, -2) U (1, +∞). En particular es positiva estrictamente en (2, +∞)

$\int_2^3 \frac{4}{x^2+x-2}dx$. Hacemos primero la integral indefinida:

$\frac{4}{x^2+x-2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}$; A(x+2) + B(x-1) = 4

Para x = -2; -3B = 4 ; B = -4/3. Para x = 1; 3A = 4; A = 4/3.

La indefinida es $\frac{4}{3}Ln|x-1|-\frac{4}{3}Ln|x+2|$

El área pedida es $\left[\frac{4}{3}Ln|x-1|-\frac{4}{3}Ln|x+2|\right]_2^3=\left(\frac{4}{3}Ln2-\frac{4}{3}Ln5\right)-\left(\frac{4}{3}Ln1-\frac{4}{3}Ln4\right.=\frac{4}{3}(Ln2-ln5+ln4)=\frac{4}{3}Ln\frac{8}{5}$

8. Calcular $\int\frac{2x-1}{x(x+1)^2}dx$ (Santiago, junio 2005)

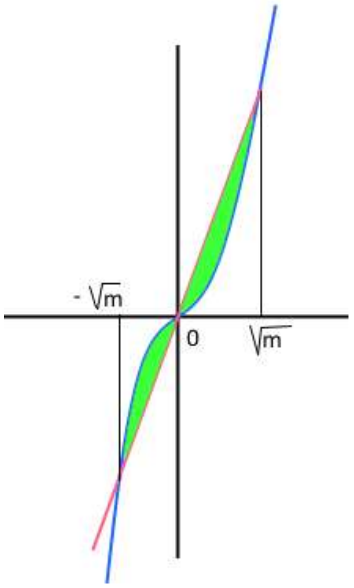
$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$
$$2x-1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

Para x = -1 ; -3 = -C de donde C = 3
Para x = 0 ; -1 = A
Para x =1 ; 1 = 4A + 2B + C; B =1

$\int\frac{2x-1}{x(x+1)^2}dx=\int\frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\,dx$ = -Ln |x| + Ln|x+1|- $\frac{3}{x+1}+k$

9. Calcula el valor de m, para que el área del recinto limitado por la recta y = mx y la curva y = x^3, sea 2 unidades cuadradas. (Santiago, junio 2006)

Los puntos de corte son $x^3 = mx$ x(x^2-m) = 0, $-\sqrt{m}, 0, -\sqrt{m}$



Por simetría:

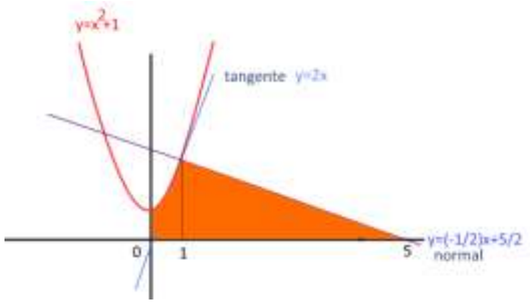
$$\int_{-\sqrt{m}}^{0} x^3 - mx\,dx = 1$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2}\right]_{-\sqrt{m}}^{0} = 1$$

$$-\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{2} = 1$$

$m^2 - 4 = 0$; m = 2. No vale la solución m =-2.

10. Halla el área determinada por y=x^2+1, su rectanormal en x=1 y los ejes.



$\int_0^1 x^2 + 1dx + \int_1^5 \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ dx =

$\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{-x^2}{4} + \frac{5x}{2}\right]_1^5 = \frac{1}{3} + 1 +$

$\left(\frac{-25}{4} + \frac{25}{2}\right) - \left(\frac{-1}{4} + \frac{5}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS
(Soluciones en la página 135)

Ejercicio 1.- Enunciado del teorema fundamental del cálculo integral. Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$ ¿Tiene F(x) puntos de inflexión? Justifica la respuesta. (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 2.- Calcula el área de la región del plano limitada por el eje OX y la curva $y = x^3-9x$ (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 3.- Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & si\; x > -\sqrt{2} \end{cases}$. Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de g(x) y h(x) = |x| (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 4. Enunciado del teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F(x) = $\int_0^x [2 + \cos(t^2)]dt,$ en el punto de abscisa x = 0. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 5.

a) Definición de primitiva de una función. Enunciado de la regla de Barrow.
b) Calcula $\int_0^1 e^x(2x-1)dx$ (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 6. Calcula $\int \frac{x+5}{x^2+4x+3}dx$ (Santiago , junio 2008)

Ejercicio 7.

a) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la recta $y = 2x$
b) Calcula $\int_0^{ln5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 8.

a) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX y la parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$
b) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral. (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 9.

a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Sabiendo que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, con f una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula f(2).
b) Calcula $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}dx$ (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 10. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la recta x+y = 7 y la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 + 5$. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad) (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 11. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de y = $-x^2+1$ y las rectas tangentes a esta parábola en los puntos de corte de la parábola con el eje OX (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad) (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 12.

a) Calcula $\int xln(1+x^2)dx$
b) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral.

Ejercicio 13. Dibuja el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1,$ su recta tangente en el punto (3,4) y el eje OX (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 14. Define integral indefinida de una función. Calcula $\int x^2 cosx\, dx$ (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 15.- Enuncia la regla de Barrow. Calcula $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - lnx\right)dx$ (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 16.-

a) Define integral y primitiva de una función.
b) Calcula el área determinada por $f(x) = -3x^2 + 3$ y la recta y = -9. (Nota: para el dibujo de la gráfica de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 17.- Calcula $\int_2^3 \frac{5x^2-3x+1}{x^2-x}dx$ (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 18.- Calcula el área limitada por la parábola y = $3x - x^2$ y su recta normal en el punto (3, 0). (Nota: para el dibujo de la gráfica de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 19.-

a) De una función derivable f(x) sabemos que pasa por el punto (0,1) y que su derivada es f'(x) = xe^{2x}. Calcula f(x) y la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto correspondiente a x=0.
b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 20.- Calcula $\int_1^0 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx$ (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 21.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola y = $-x^2 + 2x + 3$, la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto en el que la tangente es paralela a la recta y = 4x. (Nota: para el dibujo de la gráfica, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 22.-

a) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y la bisectriz del primer cuadrante. (Nota: para el dibujo de la gráfica, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad)

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x}dx$ (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 23.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, y las rectas y = 20; x-y+15 = 0. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad)

Ejercicio 24.-

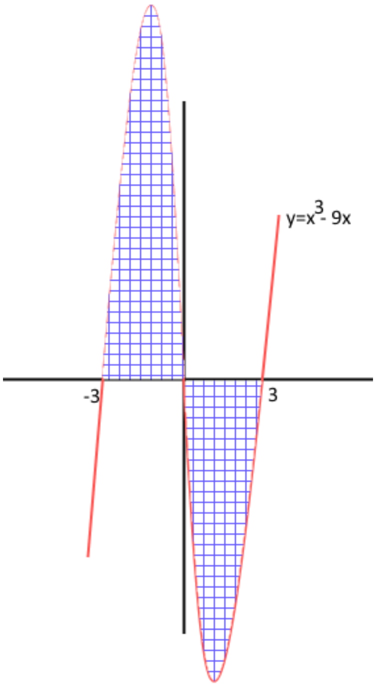
a) Define primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow.

b) Calcula $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$ (Santiago, septiembre 2013)

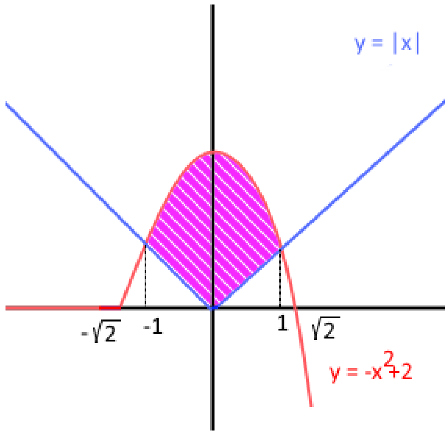
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS:

1) Sí, en el punto (0,0)
2) $\frac{81}{2}\, u^2$.
3) $\frac{7}{3}\, u^2$.
4) y = 3x.
5) b) 3 – e.
6) $2ln|x+1| - ln|x+3| + K$.
7) a) $\frac{131}{32}\, u^2$. b) 1/3.
8) a) $\frac{8}{3}\, u^2$.
9) a) 16. b) 1-ln2+2ln3.
10) 23/6 u^2.
11) 2/3 u^2.
12) a) $\frac{(x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2}{2} + K$.
13) 8/3 u^2.
14) $(x^2-2)senx + 2xcosx + k$.
15) 0.
16) b) 32 u^2.
17) $\ln\frac{16e^5}{3}$.
18) 38/81 u^2.
19) a) $f(x) = e^{2x}\left(\frac{2x-1}{4}\right) + \frac{5}{4}$; y = 0.
20) 1-ln2.
21) 2/3 u^2.
22) a) 37/12 u^2. b) $\frac{x^2}{2} + x - 3\ln|x| + 4\ln|x+1| + k$
23) 7/6 u^2.
24) b) $\frac{5+ln\sqrt{6}}{2}$

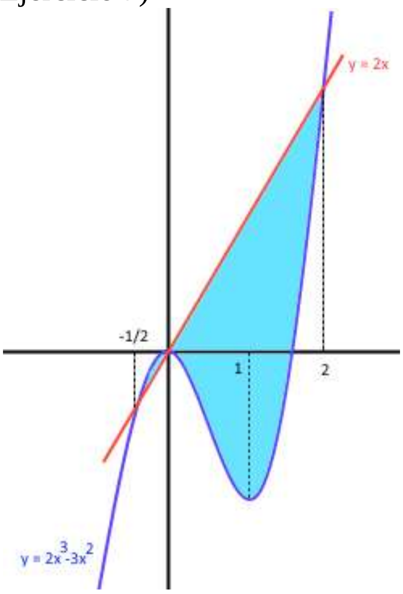
Ejercicio 2)



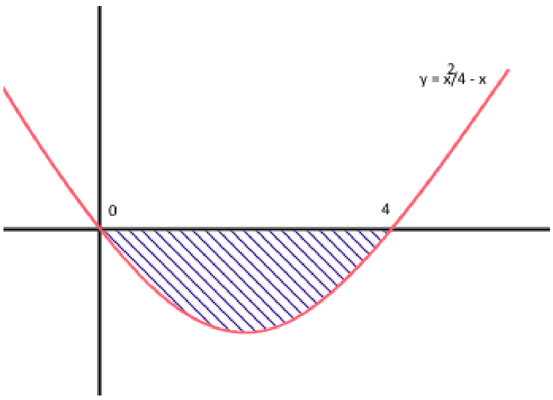
Ejercicio 3)



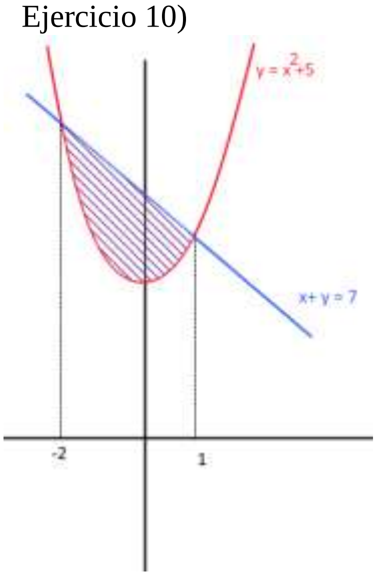
Ejercicio 7)



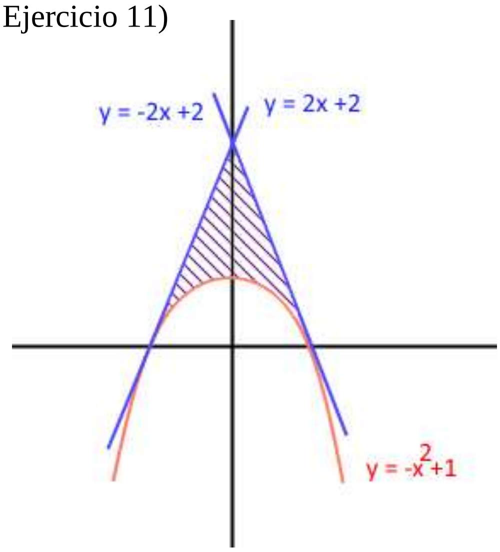
Ejercicio 8)



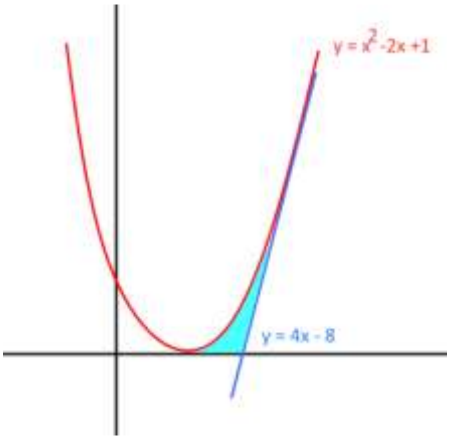
Ejercicio 10)



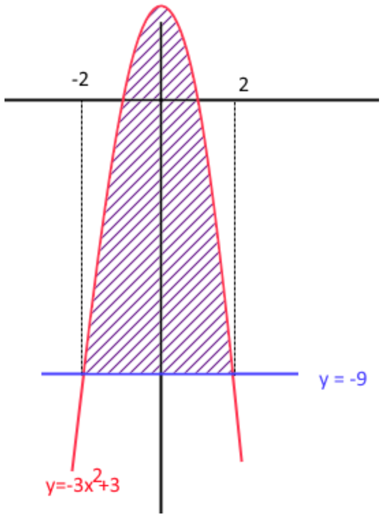
Ejercicio 11)



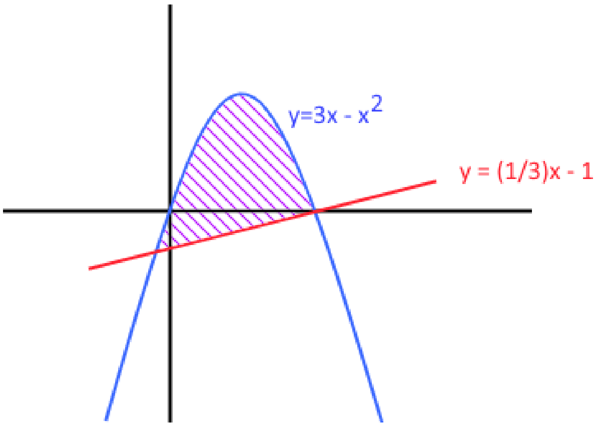
Ejercicio 13)



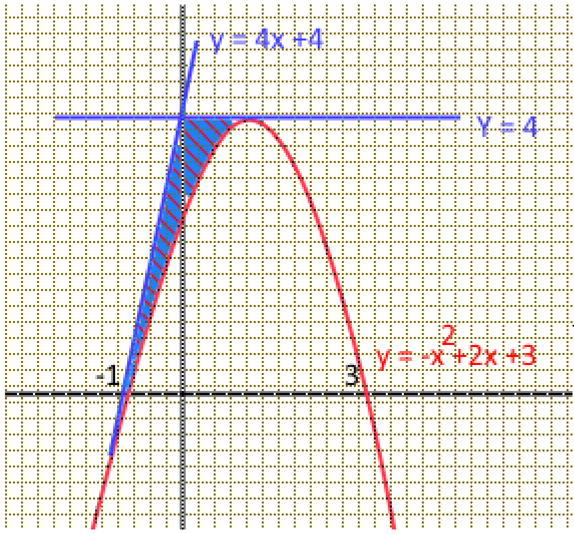
Ejercicio 16)



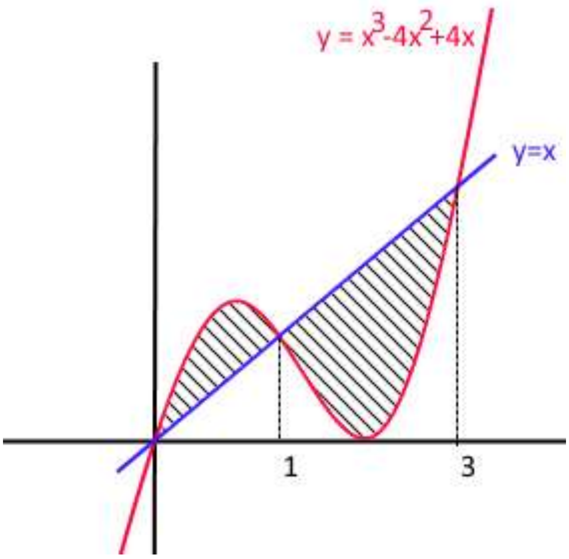
Ejercicio 18)



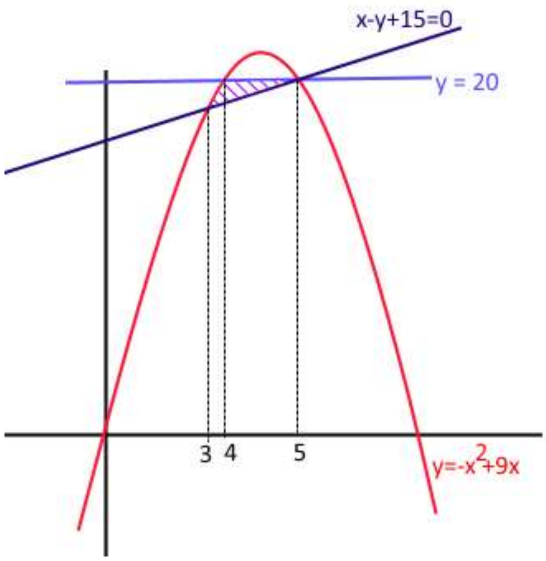
Ejercicio 21)



Ejercicio 22)



Ejercicio 23)



TEMA VII

ALGEBRA DE SUCESOS

Sea un experimento aleatorio. Definimos los siguientes conceptos:

Suceso elemental.- Es cada uno de los resultados directos del experimento aleatorio.

Por ejemplo si lanzamos un dado, los sucesos elementales son 1,2,3,4,5,6.

Espacio muestral.- Es el conjunto formado por los sucesos elementales de un experimento aleatorio. Suele representarse con la letra Ω.

Suceso.- Es cualquier subconjunto de un espacio muestral Ω y suelen representarse con letras mayúsculas A,B,C...etc

De este modo puedo afirmarse que si tenemos n sucesos elementales, el conjunto de sucesos, representado por P(Ω), tendrá 2^n elementos. (se deduce fácilmente por combinatoria)

Suceso imposible.- Es el que nunca se verifica dentro del experimento aleatorio. Se representa por $\varnothing$.

Suceso seguro.- Es el que siempre se verifica y coincide con Ω.

Sucesos incompatibles.- Son aquellos que no puedes realizarse simultáneamente.

Sucesos independientes.- Dos sucesos se dice que son independientes, cuando la realización de uno no influye en la realización del otro.

Operaciones con sucesos:

a) Unión de sucesos:

Dados dos sucesos A y B, asociados a un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, se define $A \cup B$, como el suceso que se verifica cuando se verifica A, B o ambos. (Es el equivalente a lo que en lógica se denominaría una disyunción inclusiva).

b) Intersección de sucesos:

Dados dos sucesos A y B, asociados a un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, se define $A \cap B$, como el suceso que se verifica cuando se verifica Ay B simultáneamente. (Es el equivalente a lo que en lógica se denominaría una conjunción).

Según esta definición se deduce que dos sucesos A y B son incompatibles si y sólo si se verifica que $A \cap B = \varnothing$

c) Negación o complementario:

Se denomina complementario del suceso A, y se representa por $\rceil$A, al suceso que se verifica cuando no se verifica A.

d) Diferencia de sucesos:

Dados dos sucesos A y B, asociados a un espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, se define A- B, como el suceso que se verifica cuando se verifica A y no se verifica B. Esta operación se puede definir en términos de unión intersección y negación, del siguiente modo:

$A - B = A \cap \rceil B$

Propiedades de las operaciones:

Para cualesquiera sucesos A, B, C de un experimento aleatorio, se tiene:

1) Commutativa : $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$
2) Asociativa : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3) Distributivas : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4) Idempotentes: $A \cap A = A$; $A \cup A = A$
5) Leyes de Morgan: $\rceil (A \cup B) = \rceil A \cap \rceil B$; $\rceil (A \cap B) = \rceil A \cup \rceil B$
6) Simplificativa o de absorción $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
7) De identidad: $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$
8) Del complementario: $A \cup \rceil A = \Omega$; $A \cap \rceil A = \emptyset$; $\rceil \rceil A = A$; $\rceil \Omega = \emptyset$; $\rceil \emptyset = \Omega$

Frecuencias absolutas y relativas de un suceso

Dado un experimento aleatorio, con un espacio muestral Ω, que realizamos N veces, y dado un suceso de dicho experimento que denotaremos por A, llamamos frecuencia absoluta del suceso A, al número de veces que dicho suceso se verifica en el experimento y llamamos frecuencia relativa de A, a la proporción con que dicho suceso se verifica.

Por tanto: $f_a(A) = n$ y $f_r(A)=n/N$

Son propiedades de la frecuencia relativa, las siguientes:

1. $0 \leq f_r(\mathbf{A}) \leq \mathbf{1}$

Demostración:

Puesto que $0 \leq f_a(A) \leq N$, divididendo por N, se obtiene $0 \leq f_r(A) \leq 1$

2. $f_r(\Omega) = 1$**;** $f_r(\emptyset) = 0$

Demostración:

Es trivial teniendo en cuenta que $f_a(\Omega)=N$ y que $f_a(\emptyset)=0$

3. $f_r(A) + f\ (\neg A) = 1$

Demostración:

Si A aparece n veces, la frecuencia de $\rceil A$ es N-n, por lo que se tiene que

$$f_r(A) + f_r(\neg A) = \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N} = 1$$

4. $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$

Demostración:

Sea $f_a(A)=n_a$; $f_a(B)=n_{b;}$; $f_a(A \cap B)=n_{ab}$. ; $f_a(A \cap \rceil B)=n_{a\rceil b}$; $f_a(\rceil A \cap B)=n_{\rceil ab}$

Según esta notación podemos afirmar los siguiente:

$$f_r(A \cup B) = \frac{n_{ab} + n_{\neg ab} + n_{a\neg b}}{N} \quad (1)$$

Ahora bien, dado que $n_a = n_{a\neg b} + n_{ab}$ y $n_b = n_{\neg ab} + n_{ab}$, resulta que

$$(1) = f_r(A \cup B) = \frac{n_{ab} + n_a - n_{ab} + n_b - n_{ab}}{N} = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$$

5. Si A y B son dos sucesos incompatibles $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

Demostración:

Es obvia basándose en la propiedad anterior y teniendo en cuenta que si A y B son incompatibles entonces $A \cap B = \emptyset$

6.. $Si \quad A \subset B, \quad f_r(A) \leq f_r(B)$

Demostración:

$Si \quad A \subset B, \quad B = A \cup (B - A)$ y teniendo en cuenta que A y B-A son dos sucesos incompatibles, aplicando la propiedad anterior resulta que

$f_r(B) = f_r(A) + f_r(B - A)$, dado que $P(B - A) \geq 0,$ resulta que $f_r(A) \leq f_r(B)$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.- Si lanzamos tres monedas al aire. Se pide:

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
b) ¿Cuántos sucesos tiene el experimento?
c) Describe los sucesos A = "que salgan al menos dos caras"; B = "que salga al menos una cruz"
d) ¿Cuál es el suceso complementario de B?
e) Expresar el suceso $A \cap B$

Ejercicio 2.- Sea el siguiente experimento aleatorio: En una urna hay una bola blanca y una negra. Se extrae una bola: si es blanca se devuelve a la urna y se vuelve a extraer otra bola, procediendo del mismo modo; es decir que si la segunda es blanca se vuelve a introducir en la urna y se vuelve a extraer otra bola...y asi sucesivamente hasta que salga una negra, en cuyo momento el experimento finaliza. ¿Cuál es el espacio muestral de dicho experimento? ¿Es finito o infinito? ¿Si es infinito es numerable o no?

Ejercicio 3.- Un experimento consiste en lanzar un dado. Se pide:

a) Describe el espacio muestral.
b) Sea A = "salir par"; B = "ser múltiplo de 3". Hallar $A \cap B$ y $\rceil B$

Ejercicio 4.- Si lanzamos 5 dados, ¿cuántos sucesos elementales tendremos? ¿En cuantos de ellos nos salen los cinco resultados impares?

Ejercicio 5.- Si lanzamos 6 monedas, ¿cuántos sucesos elementales tendremos?. ¿En cuantos casos distintos nos pueden salir exactamente dos caras?

Ejercicio 6.- Si extraemos dos bolas de una urna que contiene 4 rojas y 2 negras, ¿cuántos casos se pueden producir? ¿En cuántos de ellos nos saldrá una de cada color? ¿En cuantos casos nos saldrán las dos bolas rojas?

Ejercicio 7.- Lanzamos una moneda al aire. Si sale cara, lanzo un dado de 6 caras (un cubo de caras numeradas del 1 al 6) y si sale cruz lanzo un dado de cuatro caras (tetraedro de caras numeradas del 1 al 4). ¿Cuántos sucesos elementales tiene el experimento? ¿En cuántos casos nos saldrá el resultado del dado par?

Ejercicio 8.- Tenemos 6 cartas en seis sobres correspondientes. Se extraen las 6 cartas del sobre y se barajan, para introducirlas de nuevo al azar. ¿Cuántas introducciones distintas podemos realizar? ¿En cuántas de ellas obtendremos la situación de partida?

Ejercicio 9.- Cuántos casos distintos pueden producirse al lanzar al aire 4 monedas. ¿En cuántos de estos casos va a salir por lo menos una cara?

Ejercicio 10.- Pon un ejemplo de un par de sucesos que sean compatibles e independientes.

TEMA VIII

PROBABILIDAD

Se comprueba empíricamente que la frecuencia relativa de un suceso de un experimento aleatorio se aproxima a un valor fijo al aumentar el número de experiencias. Esta propiedad, llamada ley del azar, fue inicialmente descubierta en los juegos de azar; al tirar una moneda al aire, la frecuencia relativa del suceso "cara" tiene, al aumentar el número de tiradas, hacia el valor constante ½. Posteriormente se observó esta propiedad en datos demográficos; así la frecuencia relativa del nacimiento de varones tiende a 0,51.

Estas experiencias condujeron en el siglo XIX a definir la probabilidad de un suceso como el valor límite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente el suceso. Esta definición presenta problemas importantes puesto que no es posible una experiencia indefinida; así en los años 30 del siglo XX, se definió la probabilidad como una función definida en el conjunto de sucesos que tiene las propiedades de la frecuencia relativa.

Esto conduce a la llamada definición axiomática de la probabilidad.

Concepto de probabilidad (Axiomática de Kolmogorov):

Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se define la probabilidad como una función que a cada suceso del conjunto de sucesos de Ω, le asigna un número real

$$
\begin{array}{rcl}
P:\wp(\Omega) & \longrightarrow & R \\
A & & P(A) = \text{“probabilidad del suceso A”}
\end{array}
$$

verificando los siguiente axiomas (proposiciones indemostrables dadas por válidas), llamados axiomas de Kolmogorov:

1. $0 \le P(A) \le 1, \quad \forall A \in \wp(\Omega)$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $A \cap B = \varnothing \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

En estas condiciones, a la terna $(\Omega,\ \wp(\Omega),\ P)$ se le denomina espacio de probabilidad.

Propiedades de la probabilidad:

Parecería lógico que debiera tener las mismas propiedades que la frecuencia relativa, y así va a ser, deduciéndose las mismas de los tres axiomas anteriores. Son las siguientes:

1.- $P(\neg A) = 1 - P(A) \quad ,\forall A \in \wp(\Omega)$

Demostración:

$\Omega = A \cup \neg A \quad , P(\Omega) = P(A \cup \neg A) = P(A) + P(\neg A)$**, de donde** $P(\neg A) = 1 - P(A)$

2.- P(∅) = 0

Demostración:

$\varnothing = \neg\Omega$, entonces por el axioma anterior tenemos que

P(∅) = 1-P(Ω) = 1-1 = 0

3.- Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$

Demostración:

$B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4.- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración:

$A \cup B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$

$B = (B - A) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$

Restando las dos igualdades anteriores, se tiene

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$, de donde se concluye que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Postulado de equiprobabilidad. Regla de Laplace

Cuando un experimento aleatorio tiene n sucesos elementales y no existe ninguna razón que favorezca la realización de uno respecto de los otros, debe admitirse que todos tienen la misma probabilidad y se llaman equiprobables.

Si llamamos x a la probabilidad de uno cualquiera de ellos se debe cumplir, dado que $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $P(\Omega) = P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n)$ = x+x+ ... +x = n.x, es decir que 1=n.x, de donde $\boxed{x = 1/n}$

Ahora bien, dado un suceso cualquiera A, sabemos que está constituido por p sucesos elementales (aquellos favorables a su verificación), por tanto siguiendo el razonamiento anterior, sabemos que A = $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ y por tanto

$P(A) = x + x + ... + x$ = x.p, pero teniendo en cuenta que x=1/n, resulta finalmente

$$\boxed{P(A) = p/n}$$

Esta es la llamada Regla de Laplace que dice: *En un espacio muestral equiprobable, la probabilidad de un suceso es la relación entre el número de casos favorables (a la aparición del suceso) y el de casos posibles (todos los del experimento).*

Es de vital importancia resaltar que esta regla tan sólo se puede aplicar cuando los sucesos elementales son equiprobables, por lo que su utilidad es restringida.

La combinatoria es muy útil a la hora del cálculo del número de casos favorables y posibles, a la hora de aplicar esta regla en múltiples problemas.

Probabilidad condicionada:

A veces, el conocimiento de una información complementaria o preliminar, hace variar la probabilidad de un suceso.

Veamos un ejemplo ilustrativo de esta afirmación:

Supongamos que tenemos una urna con 100 bolas distribuidas según la siguiente tabla:

	Rojas	Blancas	Totales
Madera	7	25	32
Cristal	32	36	68

Totales	39	61	100

El experimento consiste en extraer una bola al azar. Sean los sucesos siguientes:

A= “salir roja”; B= “salir de madera”

Está claro que se trata de un espacio muestral equiprobable (no hay ninguna razón para que me salga una determinada bola con más frecuencia que las demás) y por tanto se puede aplicar la regla de Laplace, en cuyo caso

P(A) = 39/100 P(B) = 32/100 y P(A∩B) = 7/100

Consideremos ahora el suceso “salir una bola de madera de entre las rojas”, o expresado de otro modo “Si sabemos que la bola que sale es roja, que sea de madera”. Evidentemente es un hecho seguro en el enunciado del suceso que la bola es roja, por tanto tenemos una información preliminar o dicho de otro modo, el suceso está condicionado por el hecho de que la bola es roja. A este tipo de sucesos se les denomina sucesos condicionados y se escriben asi:

B/A, leyéndose B condicionado a A. El suceso A es la condición y B es el condicionado.

En nuestro caso sería “salir de madera condicionado a ser roja”.

Obsérvese que la probabilidad cambia ya que el espacio muestral se reduce a las bolas rojas, por tanto P(B/A) = 7/39.

Así pues en general, podemos afirmar lo siguiente:

Dado que $P(A)=\dfrac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)}$, en el caso de B/A, el espacio muestral pasa de ser Ω a ser A, por tanto podemos afirmar que:

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

que es la expresión que determina el valor de la probabilidad condicionada.

De esta expresión se deduce que $P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes cuando la realización de uno no influye en la realización del otro, esto es que uno no condiciona al otro a la hora de verificarse, por tanto podemos afirmar que en este caso A/B = A o B/A = B

Según esto, si A y B son independientes se tiene que $\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$ que es la expresión que los caracteriza.

Teorema de la probabilidad total y Teorema de Bayes.

Llamamos sistema completo de sucesos a un conjunto de sucesos incompatibles entre sí $\{A_1,A_2,A_3,...,A_k\}$, de forma que $\Omega=A_1\cup A_2\cup...\cup A_K$.

Consideremos un suceso X del experimento y tratemos de averiguar su probabilidad, suponiendo conocidas las de los A_i y las de X/A_i

Obviamente X = $(X\cap A_1)\cup(X\cap A_2)\cup...\cup(X\cap A_K)$, siendo las expresiones entre paréntesis sucesos incompatibles, por tanto:

$P(X)=\sum_{i=1}^{k}P(X\cap A_i)$, ahora bien, sabemos que $P(X\cap A_i)=P(A_i).P(X/A_i)$

Asi pues, $\boxed{P(X) = P(A_1).P(X/A_1) + P(A_2).P(X/A_2) + \ldots + P(A_k).P(X/A_k)}$

llamado Teorema de probabilidad total.

Supongamos ahora que lo que queremos calcular son las probabilidades de los sucesos A_i/X.

En este caso sabemos que $P(A_i/X) = \dfrac{P(A_i \cap X)}{P(X)} = \dfrac{P(A_i).P(X/A_i)}{P(X)}$

y aplicando el teorema de las probabilidades totales, se obtiene:

$$\boxed{P(A_i/X) = \frac{P(A_i).P(X/A_i)}{P(A_1).P(X/A_1) + P(A_2).P(X/A_2) + \ldots + P(A_k).P(X/A_k)}}$$

que es el llamado Teorema de Bayes.

Es importante en los problemas de probabilidad, tratar de detectar un sistema completo de sucesos para poder aplicar estos teoremas.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.- Se considera el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire y anotar el número de la cara superior. Hallar:

a) El espacio muestral.
b) El suceso A="obtener número par"
c) El suceso B="obtener número primo"
d) El suceso C="obtener número múltiplo de 3"
e) La unión e intersección de cada dos de los sucesos de los apartados anteriores
f) Los sucesos: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

Ejercicio 2.- Se lanzan al aire dos dados distintos. Determinar:

a) El espacio muestral
b) El suceso A="los números de las caras suman 7"
c) El suceso B="el producto de los números de las caras es 12"
d) Los sucesos $A \cup B \quad y \quad A \cap B$

Ejercicio 3.- De los individuos que componen una muestra se conocen los siguientes datos: 50 son mujeres, de ellas 30 son rubias; hay 10 varones rubios y 60 individuos morenos. ¿De cuántos individuos se compone la muestra? ¿Cuántos de los individuos son varones?

Ejercicio 4.-En una cafetería contamos los refrescos de naranja y limón que se venden de dos marcas distintas A y B. Sabemos que el 80% de los refrescos que venden son de naranja y que de ellos el 35% lo fabrica la marca B. Si de la marca A son el 70% de todos los refrescos que se venden calcula el porcentaje de refrescos de limón que se vende de la marca A y de la marca B.

Ejercicio 5.- En un avión viajan 240 personas. De ellas 110 hablan inglés, 66 francés, 58 alemán, 42 francés e inglés, 36 francés y alemán, 30 alemán e inglés y 14 los tres idiomas. Se pide:

a) ¿cuántos no hablan ninguno de los 3 idiomas?
b) ¿Cuántos sólo hablan alemán e inglés?
c) ¿Cuántos hablan sólo francés?.

Ejercicio 6.- En una escuela de estudios empresariales los alumnos de 2º curso que suspenden las tres asignaturas, Matemáticas, Contabilidad y Estadística, repiten curso. El último año los resultados fueron: 6% aprobaron las 3 asignaturas; 22% aprobaron Matemáticas y Contabilidad; 16% aprobaron Matemáticas y Estadística; 28% aprobaron Contabilidad y Estadística; 37% aprobaron Matemáticas; 56% aprobaron Contabilidad y el 41% aprobaron Estadística.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos repitió curso?
b) ¿Qué porcentaje aprobó solo una asignatura?

Ejercicio 7.- Dados dos sucesos A y B incompatibles que verifican P(A)=0,3 y P(B)=0,12. Calcular:

$P(\overline{A}),\ P(\overline{B})\ ,P(A\cup B)\ y\ P(\overline{A\cup B}).$

Ejercicio 8.- Sean A y B dos sucesos tales que: P(A)=0’6, P(B)=0’4 y P($A\cap B$)=0’2. Calcular:

$P(A\cup B),\quad P(\overline{A})\ ,P(\overline{B}),\ P(\overline{A\cup B})\ ,\ P(B-A)$

Ejercicio 9.-Dados dos sucesos que verifican

$P(A\cup B)=3/4,\quad P(\overline{A})=2/3,\ P(A\cap B)=1/4$. Calcular: P(A), P(B), $P(\overline{A}\cap B),\ P(A\cap \overline{B})$

Ejercicio 10.- En una carrera participan los caballos A, B, C y D. Se estima que la probabilidad de que gane A es el doble de cada una de las probabilidades de los otros caballos. Calcular la probabilidad de ganar de cada uno de los caballos.

Ejercicio 11.- En una bolsa hay bolas negras y blancas. La probabilidad de extraer bola blanca es de dos quintos de la probabilidad de sacar bola negra. Determinar la probabilidad de extraer bola negra y la probabilidad de sacar bola blanca.

Ejercicio 12.- En un dado trucado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6, la probabilidad de que salga cada cara es directamente proporcional al número que aparece en la misma. Hallar la probabilidad que tiene cada cara de salir.

Ejercicio 13.- Se lanzan 3 monedas al aire. Hallar:

a) El espacio muestral.

b) La probabilidad de cada uno de los sucesos elementales

c) La probabilidad de al menos una cara.

Ejercicio 14.- Se extrae al azar una carta de una baraja de 40 naipes. Calcular la probabilidad de que la carta extraída sea: a) Copa, b) As, c) Figura, d) El 3 de oros.

Ejercicio 15.- Se lanzan al aire dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 7?

Ejercicio 16.- Queremos marcar un número de teléfono de 7 cifras y sólo sabemos las 5 primeras:

a) Calcular la probabilidad de acertar con el número que buscamos.

b) Calcular la probabilidad de acertar con el número, sabiendo que las dos cifras desconocidas son distintas.

Ejercicio 17.- Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Determinar la probabilidad de que una persona escogida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

Ejercicio 18.- En una ciudad se editan 3 periódicos A, B, C con la siguiente distribución de lectores: de cada 100 habitantes 30 leen A, 28 leen B, 17 leen C, 15

leen A y B, 9 leen A y C, 11 leen B y C, y 6 leen los tres. Se elige una persona al azar, calcular:

a) La probabilidad de que lea algún periódico.
b) La probabilidad de que lea exactamente un periódico.
c) Probabilidad de que lea B y C pero no A.

Ejercicio 19.- En un centro escolar, los alumnos de COU pueden optar por cursar, como lengua extranjera, entre inglés o francés. En un determinado curso, el 90% estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son varones y de los que estudian francés son chicos el 40%. Elegido un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?

Ejercicio 20.- Sean A y B dos sucesos con P(A)=1/2, P(B)=1/3 y $P(A\cap B)=1/4$, calcular:

P(A/B), P(B/A), P(AUB)

Ejercicio 21.- Sabiendo que P(A) = 0'3 , $P(\overline{B}) = 0'6$, $P(A/B) = 0,32$, calcular:

P(A∩B), P(AUB), P($(A/\overline{B})$ $P(B/A)$ $P(\overline{AUB})$, $P(\overline{A\cap B})$

Ejercicio 22.- a) Sabiendo que $A \subset B$ calcular P(B/A) y P(A/B)

b) Si A y B son incompatibles, calcular P(B/A)

Ejercicio 23.- En una empresa hay 45 empleados, de los cuales 29 son hombres y 16 mujeres. De ellos, 7 hombres y 5 mujeres son fumadores. Calcula las siguientes probabilidades:

P(H) , P(M), P(H∩F), P(M∩F) , P(F), P(H/F) l P(M/F)

Ejercicio 24.- El 20% de los empleados de una empresa son Ingenieros y otros 20% son Economistas. El 75% de los Ingenieros ocupan un puesto directivo, y el 50% de los Economistas también, mientras que de los No-Ingenieros y No-Economistas solamente el 20% ocupan un puesto Directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado Directivo elegido al azar sea Ingeniero?

Ejercicio 25.- Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae al azar una bola. Calcula:

a) La probabilidad de que sea blanca.
b) Si la bola extraída está marcada, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Ejercicio 26.- Se sortea un viaje a Canarias entre los 200 clientes de una tienda de electrodomésticos. De ellos 125 son mujeres, 155 están casados y 95 son mujeres casadas. ¿cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?. Si del afortunado sabemos que está casado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Ejercicio 27.- En una clase el 40% de los alumnos aprueba Matemáticas y el 50% aprueba filosofía. Se sabe que la probabilidad de aprobar matemáticas si se aprobó filosofía es 0'6.

a) Estudiar si los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Filosofía son independientes.
b) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron las dos asignaturas?

c) De los alumnos que aprobaron Matemáticas, ¿qué porcentaje aprobó Filosofía?

Ejercicio 28.- En un Instituto el 25% de los alumnos han suspendido Matemáticas, el 15% han suspendido Física y el 10% han suspendido las 2 asignaturas. Se selecciona un individuo al azar. Calcular:

a) La probabilidad de que haya suspendido matemáticas.
b) Si ha suspendido Matemáticas, cuál es la probabilidad de que haya suspendido Física
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya suspendido Matemáticas ó Física.
d) Si ha aprobado Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido la Física?

Ejercicio 29.- Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire. Si las tres monedas aparecen de igual modo (tres caras o tres cruces), se gana. En caso contrario, se vuelve a tirar. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?
b) ¿Cuál, la de perder las dos primeras y ganar la tercera?

Ejercicio 30.- Una urna contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 2 bolas aleatoriamente sin reemplazamiento. Halla la probabilidad de que:

a) Las 2 bolas sean rojas.
b) Las bolas sean extraídas en este orden: roja, azul
c) Una bola sea roja y una sea blanca.
d) Al menos una bola sea blanca.

Ejercicio 31.- En una caja hay 15 bombillas de las cuales 5 están fundidas. Si cogemos 3 de ellas al azar, cual es la probabilidad de que:

a) Ninguna esté fundida
b) Exactamente una esté fundida.
c) Por lo menos una esté fundida.

Ejercicio 32.- Las probabilidades de acertarle a un blanco de tres tiradores, A, B y C son respectivamente, 1/6, ¼ y 1/3. Si cada uno de ellos dispara una sola vez al blanco, calcular:

a) La probabilidad de que uno exactamente acierte en el blanco
b) Si 150olo uno acierta en el blanco, cual es la probabilidad de que sea A
c) Hallar la probabilidad de que alguno acierte en el blanco.

Ejercicio 33.- La Compañía "Minisegadoras" fabrica los motores, las hojas y las cubiertas de sus productos. El porcentaje de los motores defectuosos es del 5%, el de hojas defectuosas es el 1% y el de cubiertas el 3%. ¿Cuál es la probabilidad de que una segadora montada no tenga defectos?

Ejercicio 34.-La probabilidad de que un torpedo hunda un barco es 0'2. Un 150ubmarine dispara 3 torpedos, ¿Cuál es la probabilidad de que hunda a un barco?

Ejercicio 34.- En una bolsa hay 12 bolas blancas y 20 verdes. Al sacar 4 bolas sucesivamente calcular la probabilidad de que las 4 sean blancas. (Con y sin devolución)

Ejercicio 35.- Probabilidad de que al sacar sucesivamente sin devolución 5 cartas de una baraja las 5 sean del mismo palo.

Ejercicio 36.- Urna I: Contiene 6 bolas rojas y 4 bolas blancas. Urna II: contiene 4 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se lanza un dado. Si aparece un número menor que 3, nos vamos a la urna I; si el resultado es 3 o más nos vamos a la urna II. A continuación extraemos una bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola sea roja y de la urna II

b) Probabilidad de que la bola sea blanca.

Ejercicio 37.- Tres cofres idénticos contienen: El primero, 3 lingotes de oro y 2 de plata; el segundo, 2 de oro y 5 de plata; y el tercero, 6 de oro y 7 de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un lingote al azar de un cofre sea de plata?

Ejercicio 38.- En una casa hay dos tarros que contienen caramelos. En el primer tarro hay 8 caramelos de naranja y 12 de limón. En el segundo tarro hay 15 caramelos de naranja y 5 de limón. Un niño que viene de visita elige uno de los tarros y en él un caramelo. Si al comerlo nota que es de naranja, ¿qué probabilidad tiene de haber elegido el segundo tarro?

Ejercicio 39.- Tres maquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. Los porcentajes de defectuosos en cada máquina son respectivamente 1%, 2%, 3%. Se mezclan 120 tornillos: 20 de la máquina A, 40 de la B y 60 de la C. Elegido uno al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

Ejercicio 40.- Dos medicamentos A y B son eficaces para 151astil una enfermedad. El medicamento A produce mejoría en el 74% de los caos y el B en el 80% de los casos. En una clínica tienen 3 tubos del medicamento A y 2 del medicamento B.Eelegimos un tubo al azar y le damos de él una 151astille al enfermo.

a) Calcula la probabilidad de que el enfermo tenga mejoría en la enfermedad.

b) Si sabemos que el enfermo mejora, calcula la probabilidad de que se le suministrase el medicamento B.

Ejercicio 41.- Se lanza una moneda hasta que el resultado sea cara. Halla la probabilidad de que esto suceda: **a)** en el primer lanzamiento. **b)** en el segundo lanzamiento. **c)** En el lanzamiento n-ésimo.

Ejercicio 42.- Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, tales que la probabilidd de que ocurran simultáneamente ers 1/3 y la de que no ocurra ninguno de los dos es 1/6. halla P(A) y P(B).

Ejercicio 43.- Suponiendo que todos los meses del año son de 30 días, hallar la probabilidad de que los cumpleaños de tres hermanos sean:

a) El mismo día del año ; b) Los tres en días distintos c) Los tres en el mismo mes

b) Cada uno en un mes distintos e) Los tres en marzo f) Ninguno en mayo.

Ejercicio 44.- Un banco partiendo de la información sobre el comportamiento de sus clientes referida a los errores cometidos al cubrir cheques obtiene las siguientes conclusiones: - De 850 clientes con fondos, 25 cometieron algún error. El 98% de los clientes tiene fondos. De 50 cheques sin fondos, 45 tenían algún error. Calcular la probabilidad de que un cheque con algún error no tenga fondos.

Ejercicio 45.- En un lote de 40 pastillas de jabón hay 5 premiadas. Compramos 3 pastillas. Calcular la probabilidad de que: a) Las tres tengan premio; b) Exactamente 2 tengan premio; c) Alguna tenga premio.

Ejercicio 46.- Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Este se realiza extrayendo al azar tres temas y dejando que el alumno escoja uno de ellos para ser examinado del mismo. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

Ejercicio 47.- Una clase tiene 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de 3 al azar, hallar la probabilidad de:

a) Seleccionar 3 niños.
b) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
c) Seleccionar por lo menos un niño.
d) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

Ejercicio 48.- En una bolsa hay 4 bolas verdes y 8 bolas rojas. Se saca una bola de la bolsa y se devuelve acompañada de otra del mismo color. Se saca entonces una segunda bola. Calcular:

a) La probabilidad de que la segunda bola sea verde.
b) Probabilidad de que las dos bolas sean rojas.
c) Probabilidad de que sean la primera roja y la segunda verde.

Ejercicio 49.- Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los cuales el 0,4% son defectuosos. La segunda le proporciona el resto, siendo defectuosos el 1,5%. Un día el joyero, al vender un reloj, observa que este no funciona. Hallar la probabilidad de que el reloj proceda de la primera casa proveedora.

Ejercicio 50.- Dos personas comparten el mismo número de teléfono. De las llamadas que llegan 2/5 son para A y 3/5 para B. Sus ocupaciones los tienen alejados del teléfono de modo que A está fuera el 50% del tiempo y B el 25% del tiempo. Calcula la probabilidad de que al recibir una llamada no haya nadie para coger el teléfono y la probabilidad de que al recibir una llamada esté presente la persona a la que llaman.

Ejercicio 51.- Un 70% de los 152lients de una compañía de seguros de automóviles tienen más de 25 años. Un 5% de los 152lients de ese grupo tienen un accidente a lo largo del año. En el caso de 152lients menores de 25 años este porcentaje es del 20%.

a) Si elegimos un asegurado al azar, calcular la probabilidad de que tenga un accidente ese año.
b) Si una persona tuvo un accidente, calcular la probabilidad de que sea menor de 25 años.

Ejercicio 52.- Los expertos afirman que la probabilidad de que la bolsa suba es 0’4. Por otra parte la probabilidad de que el dólar se mantenga estable es 0’5 y la probabilidad de que la bolsa no suba cuando el dólar permanece estable es 0’9. Calcula:

g) La probabilidad de que la bolsa suba si el dólar permanece estable.
h) La probabilidad de que el dólar se mantenga estable o suba la bolsa.
i) La probabilidad de que el dólar se mantenga estable si sube la bolsa.

Ejercicio 53.- Consideramos tres dados de los cuales dos son correctos y uno está trucado de forma que el 6 aparece en la mitad de las tiradas y las otras caras aparecen con la misma probabilidad. Se elige un dado al azar y se lanza: a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cinco? b) Si ha salido un seis, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Ejercicio 54.- Un coche frena bruscamente y provoca un accidente. Tres testigos estaban presentes: A, B y C. la probabilidad de que A haya apreciado la brusquedad de la frenada es 90%, y las correspondientes a B y C son 85% y 80%. Supuesto que los testimonios que se presten sean independientes unos de otros, ¿qué probabilidad hay de que los tres testimonien que la frenada ha sido brusca? ¿Qué probabilidad hay de que lo testimonien al menos dos de los testigos?.

Ejercicio 55.- En una fábrica de autocares se descubrió que 1 de cada 100 tenía problemas con el cierre de la puerta. Como medida de precaución, antes de la venta, a cada autocar se le hace un test de verificación y se obsequia a los compradores con un cinturón multiusos para una reparación de emergencia. El test no es totalmente fiable, pues, si el coche tiene problemas con la puerta se lo detecta en un 95% de los casos, mientras que si no lo tiene, en un 2% de las veces indica que sí.

a*)* ¿Cuál es la probabilidad de que un autocar tenga problemas con la puerta y no lo detecte el test.

b) Si el test indica problemas en la puerta, ¿cuál es la probabilidad de que no lo tenga?

Ejercicio 56.- Una secretaria escribe 5 cartas diferentes a 5 personas y mete cada carta en un sobre sin fijarse. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las personas reciban la suya?

Ejercicio 57.- Un test que detecta la presencia de cierto tipo T de bacterias en el agua da 153ositive con una probabilidad de 0’9 en caso de que las haya. Si no las hay, la probabilidad de que sea 153ositive es de 0,2. Se dispone de 100 muestras de las que 25 tienen bacterias de tipo T. Si elegimos una muestra al azar:

a*)* ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra tenga bacterias de tipo T el test sea 153ositive?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra no tenga bacterias tipo T y el test sea positive?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé negativo si la muestra tiene bacterias de tipo T?

Ejercicio 59.-Una caja A contiene 9 cartas numeradas del 1 al 9 y otra caja B contiene 5 cartas numeradas del 1 al 5. Se elige una caja al azar y se toma una carta, si está numerada con un número par se toma otra carta de la misma caja, y si está numerada con un número impar se toma de la otra caja.

a) ¿Calcula la probabilidad de que ambas cartas estén numeradas con números impares.
b) Si ambas cartas tienen números pares, calcula la probabilidad de que sean de la caja A.

Ejercicio 60.- En una bolsa hay 2 bolas blancas y 3 negras, y en otra bolsa hay 4 blancas y 1 negra. Elegimos al azar una bolsa y en ella una bola y resulta que es negra. A continuación vamos a la otra bolsa y elegimos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que también sea negra?

TEMA IX
VARIABLE ALEATORIA

Definición.- Un conjunto se dice numerable cuando es finito o cuando se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, en cuyo caso se dirá que es infinito numerable.

En caso contrario se denomina conjunto no numerable.

Son conjuntos numerables, por ejemplo, los números enteros, los racionales. No lo son los números reales o cualquier intervalo real.

Variable aleatoria.- Se denomina así a una función definida sobre un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, que alcanza valores en R, es decir que lleva sucesos elementales en números reales.

$X : \Omega \rightarrow R$, de forma que $X(e_i)=x_i$.

La variable aleatoria no es única y se define siempre en función de los sucesos que se desean estudiar.

Ejemplo de variable aleatoria: En el experimento lanzar una moneda, una variable aleatoria sería asignarle 0 al suceso cara y 1 al suceso cruz,

En el experimento aleatorio lanzar cinco monedas, se podría definir la siguiente variable aleatoria: X=”número de caras”. Es obvio que los valores posibles que podría tomar X serían 0,1,2,3,4,5. A este conjunto de valores numéricos se le denomina Recorrido de la variable aleatoria.

Si el recorrido de una variable aleatoria es finito o infinito numerable, la variable aleatoria se denomina discreta. Si por el contrario el recorrido es un intervalo de R le llamaremos variable aleatoria continua.

Un ejemplo de variable aleatoria continua es este: Lanzamos un dardo a una diana y definimos la variable aleatoria X=”distancia del impacto al centro de la diana). Es obvio que el recorrido de esta variable aleatoria es el intervalo $[0,\infty]$ que constituye un conjunto no numerable.

Función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta X.-

Se trata de una función que toma valores en el recorrido de la variable y los alcanza en R, concretamente en el intervalo [0,1].

$f : R \rightarrow [0,1]$,

de tal modo que $f(x_i) = P(e_i \,/\, X(e_i)=x_i)$, o abreviadamente $P(X=x_i)$

Propiedades de la función de masa de distribución:

a) $0 \leq f(x_i) \leq 1, \ \forall x_i \in \mathrm{Re}\,c(X)$

b) $\sum_i x_i = 1$

Ejemplo:

Supongamos el experimento aleatorio, arrojar cinco monedas al aire. Sobre el espacio muestral definimos la variable aleatoria X=”número de caras”. El recorrido de X es

{0,1,2,3,4,5}. Si f es la función de masa de probabilidad de la v.a. X, f(2), por ejemplo, toma el valor de la probabilidad del suceso elemental asociado al valor 2 mediante X, esto es la probabilidad de que salgan dos caras (y tres cruces), cuyo valor es 10/32, de este modo tendremos que:

f(0) = 1/32; f(1)=5/32; f(2)=10/32; f(3)=10/32; f(4)=5/32; f(5)=1/32.

Cualquier valor que no esté en el recorrido de X, tendrá como masa de probabilidad 0.

La función de masa de probabilidad solo es aplicable a variable aleatorias discretas, y para v.a. finitas poco numerosas, suele venir representada mediante una tabla.

Si tomamos como ejemplo, lanzar tres monedas y definimos la v.a. X=”número de caras”, el recorrido de X sería 0,1,2,3, obtenido así:

Tabla 1

e_i	ccc	cc+	c+c	+cc	c++	+c+	++c	+++
x_i	3	2	2	2	1	1	1	0

La función de mása de probabilidad será:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

La función de masa de probabilidad puede representarse mediante gráficos por medio de los diagramas de barras en las variables estadísticas unidimensionales.

Función de distribución de una variable aleatoria discreta X.- Esta función puede definirse como la función de masa de probabilidad acumulada hasta el valor correspondiente, incluido éste. La representaremos mediante F.

Por tanto:

$F : R \to R \,/\, F(x_i) = \sum_{k=1}^{i} f(x_k)$; En general se define:

$F(x) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i),$ siendo x_p el mayor valor del recorrido de X, menor que x.

Propiedades de la función de distribución:

a) Es una función escalonada monótona creciente

b) F(x) = 0, si x es un valor inferior al minimo de los valores del recorrido de X

c) F(x)=1, si x es un valor superior al máximo de los valores del recorrido de X.

d) Su gráfica es escalonada.

e) Es continua en x/ f(x)=0 y discontinua en x / f(x) =/0

Medidas características de una variable aleatoria discreta.-

Media o esperanza matemática

$$E[X] = \sum_{i=1}^{p} x_i . f(x_i)$$

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - E[X])^2 . f(x_i) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - E[X])^2 . f(x_i)}$$

Se pueden definir los momentos respecto al origen y con respecto a la media, de orden p, resultando sus valores iguales que en el caso de una variable estadística; basta sustituir las frecuencias relativas por los valores de la función de masa de probabilidad.

Variable aleatoria continua. Función de distribución

Ya vimos que la diferencia existente entre una v.a. discreta y continua venía determinada por la naturaleza del recorrido de la función. Si este recorrido era finito o infinito numerable, la v.a. era discreta. Si, por el contrario, el recorrido era un intervalo de R, la v.a. se llama continua.

Según esta definición, carece de sentido hablar de función de masa de probabilidad y por tanto se considera como valor teórico que la probabilidad de cualquier suceso elemental del espacio muestral, vale 0 (Puede razonarse utilizando la regla de Laplace).

No obstante, si puede definirse la función de distribución, esto es:

$F : R \to R$, de modo que $F(x) = P(X \leq x)$, $\forall x \in R$

Si el recorrido de la variable es el intervalo [a,b] se dan las siguientes propiedades:

a) $F(x) = 0, \forall x \leq a$

b) $F(x) = 1, \forall x \geq b$

c) $Si\ x_1 < x_2 \quad F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2)$

d) Su representación gráfica es la de una función monótona creciente y continua.

Función de densidad de una variable aleatoria continua:

Se define dicha función, como la derivada de la función de distribución en aquellos puntos en que ésta última sea derivable.

$f(x) = F'(x)$

Teniendo en cuenta esta definición, se desprenden las siguientes propiedades:

a) $f(x) \geq 0$ (Es una función no negativa. Su gráfica siempre está por encima del eje X.

b) Por el teorema fundamental del cálculo diferencial $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ = P(X<x)

c) Por la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = 1$

Medidas características de una variable continua:

Media o esperanza $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$, siendo f la función de densidad.

Varianza $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$

Desviación típica $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

La varianza puede hallarse más fácilmente así:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS DE V.A. DISCRETA

Ejercicio 1.- Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda al aire 3 veces. Sea x la variable aleatoria que indica el número de caras obtenidas.

a) Hallar el espacio muestral y definir la variable aleatoria X.
b) Hallar la función de masa de probabilidad de X y la función de distribución.
c) Calcular la probabilidad de los sucesos (X>1) (1<X<3)

Ejercicio 2.- Una urna contiene cuatro bolas negras y dos blancas. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en extraer tres bolas (sin devolución) de la urna. Definir la variable aleatoria X "número de bolas negras obtenidas".

a) Hallar la función de masa de probabilidad y de distribución de la v.a. X.
b) Calcular la probabilidad de los sucesos (X < 2) (X > 2)

Ejercicio 3.- Dada la variable aleatoria X y la función de masa de probabilidad

x	- 2	- 1	0	2	4
f(x)	1 / 8	1 / 6	3 / 8	1 / 4	1 / 12

a) Calcular la esperanza, varianza y desviación típica de X
b) La función de distribución.

Ejercicio 4.- Hallar el valor de a en las siguientes distribuciones de probabilidad

x	1	2	3	4
f(x)	0,2	a	3a	0,4

x	0	2	3	4	5
g(x)	a	3 a	2 a	3 a	a

En ambos casos hallar la función de distribución y los parámetros

Ejercicio 5.- Una variable aleatoria X toma los valores 1, 2, 3 y 4, y su función de masa de probabilidad está dada por la tabla siguiente:

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	1/8	¼	¼	3/8

Se pide:

a) La función de distribución y su gráfica.
b) La esperanza matemática y desviación típica.

Ejercicio 6.- Consíderese la variable aleatoria cuya función de masa de probabilidad es la siguiente:

x_i	-2	1	3	5
$f(x_i)$	1/7	1/8	1/9	a

a) Hállese el valor de a y la esperanza matemática.
b) Suponiendo que F es la función de distribución, hállese F(2)

Ejercicio 7.- Hállese la función de distribución, la media, y la varianza, de una variable aleatoria X cuya función de masa de probabilidad es la siguiente:

x_i	-1	0,5	1	2
$f(x_i)$	0,6	0,2	0,1	0,1

Ejercicio 8.- La función de distribución de una variable aleatoria es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<-1 \\ 1/2 & si \quad -1\le x<2 \\ 3/5 & si \quad 2\le x<3 \\ 6/7 & si \quad 3\le x<4 \\ 1 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

¿Qué valores toma dicha variable aleatoria?. Hállese su función de masa de probabilidad.

Ejercicio 9.- La función de distribución de una variable aleatoria X es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ 1/4 & si \quad 1\le x<2 \\ 1/3 & si \quad 2\le x<3 \\ 1 & si \quad 3\le x \end{cases}$$

Calcúlese:

a) $P(x\le 3)$ b) $P(1<X<3)$ c) $P(x>\frac{3}{2})$ d) $P(1<x\le 3)$ e) $P(1\le x<3)$

Ejercicio 10.- La función de distribución de una variable aleatoria X es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<2 \\ 1/3 & si \quad 2\le x<4 \\ 2/5 & si \quad 4\le x<6 \\ 1 & si \quad 6\le x \end{cases}$$

¿Qué valores toma X?. Hállese su función de masa de probabilidad, y calcúlense $P(2'5<X\le 5)$ y $P(2<X5'5)$

Ejercicio 11.- Se efectúan tres lanzamientos de una moneda, y se pide:

a) Definir la variable aleatoria X que describe el número de caras obtenidas.
b) Hallar la función de masa de probabilidad de X
c) Representar gráficamente la función de distribución de X.

Ejercicio 12.- Un jugador lanza dos dados, y cobra tantos euros como veces aparezca el 1. Descríbase ese juego mediante una variable aleatoria. ¿Resulta rentable participar en el juego si para ello hay que pagar 3 euros por tirada?

Ejercicio 13.- Para participar en un juego se exige pagar 50 euros por tirada. El juego consiste en lanzar dos dados y formar el número de dos cifras más grande posible con los resultados obtenidos. Se cobran tantos euros como indica ese número. Se pide:

a) Describir el juego mediante una variable aleatoria.
b) Hallar la correspondiente función de masa de probabilidad.
c) ¿Resulta favorable al jugador participar en el juego?

Ejercicio 14.- Se elige al azar una ficha del dominó, y se considera la variable aleatoria que describe la suma de puntos que aparecen en la ficha. Se pide:

a) Hallar la correspondiente función de masa de probabilidad.
b) Calcular la media, la varianza, y la desviación típica.

Ejercicio 15.- Se lanza una moneda, tantas veces como sea necesario, hasta que aparezca una cara o hayan salido cinco cruces consecutivas, en cuyo caso se acaba el experimento.

a) ¿Qué valores toma la variable aleatoria "número de cruces"?. Hállese la correspondiente función de masa de probabilidad.
b) Hállese, también, la función de distribución, y dígase cuál es la probabilidad de obtener un máximo de tres cruces en el experimento.

Ejercicio 16.- En una lotería hay premios de 500000 euros, premios de 50000 euros y premios de 10000 euros. Las probabilidades de obtener cada uno de ellos son, respectivamente, 0,0001, 0,002, y 0,007. Suponiendo que se vendan todos los billetes, cada billete habrá dejado 180 euros de ganancia bruta a los organizadores. ¿Qué cuesta un billete?

Ejercicio 17.- Sea X la variable aleatoria que describe el menor de los números obtenidos en el lanzamiento de dos dados. Hállese la correspondiente función de distribución y hágase una representación gráfica de la misma.

Ejercicio 18.- Un dado ha sido trucado de modo que la probabilidad de cada cara sea inversamente proporcional al número que aparece en la misma, es decir, la función de masa de probabilidad para un lanzamiento es:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	k/1	k/2	k/3	k/4	k/5	k/6

a) Hállese el valor de k
b) Un jugador lanza el dado y cobra tantos euros como indique el número obtenido, ¿Cuánto debe pagar por tirada para que el juego sea equitativo?

Ejercicio 19.- En una urna hay cinco bolas señaladas con el número 1, dos señaladas con el nº 2, y cuatro con el 3. Se considera el experimento consistente en extraer una bola para mirar el número. Hállese la función de masa de probabilidad, la media, y la desviación típica asociadas a la variable aleatoria que describe el experimento.

Ejercicio 20.- Una persona trabaja en una empresa en cuyos alrededores no puede aparcar. Si lleva el coche al garaje, tiene que pagar 1,80 euros, mientras que si aparca en lugar prohibido, le pueden poner una multa de 3 euros, con probabilidad ½. ¿Qué le resulta más ventajoso?

Ejercicio 21.- Se exigen x euros por participar en este juego: Se lanza un dado y se cobran tantos euros como indique el número obtenido elevado al cuadrado.

a) Descríbase el juego mediante una variable aleatoria y determínese su función de masa de probabilidad.
b) ¿Para qué valor de x el juego es equitativo?

Ejercicio 22.- En una bolsa hay 30 bolas iguales, quince con el número 1, ocho con el 5, cinco con el 25, y dos con el 50. Se saca una bola al azar y se cobran tantos euros como indique el número que hay en ella.

a) Determinar la función de masa de probabilidad correspondiente.
b) ¿Es rentable participar en el juego pagando 5 euros por jugada?
c) ¿Cuál es la probabilidad de lograr 20 euros de ganancia neta en una jugada?

Ejercicio 23.- Un jugador lanza dos monedas. Gana 5 euros si aparecen dos caras, 2 euros si aparece una cara, y paga 10 euros si salen dos cruces. Suponiendo que no se paga entrada ninguna por jugar, ¿resulta rentable hacerlo?

Ejercicio 24.- Considérese el experimento consistente en lanzar cuatro veces una moneda. Sea X la variable aleatoria "número de caras obtenidas". Se pide:

a) La función de masa de probabilidad de X
b) La esperanza y la varianza de X

Ejercicio 25.- Se lanzan dos dados, y se llama X a la variable aleatoria que describe el número total de puntos conseguidos. Se pide:

a) La función de masa de probabilidad de X
b) La función de distribución de X, y la probabilidad de obtener un máximo de 9 puntos.

Ejercicio 26.- Una variable aleatoria X tiene por valores los números naturales del 1 al 100, y su función de masa de probabilidad f(x) está dada por:

$$f(x)=\begin{cases} ax & si \quad x\in\{1,2,3,\ldots,100\} \\ 0 & si \quad x\notin\{1,2,3,\ldots,100\}\end{cases}$$

Hallar la media de la variable X

Ejercicio 27.- Un alumno de un IES dice haber inventado el siguiente juego para dos: Cada jugador lanza dos monedas y el que obtenga mayor número de caras cobra un euro del otro por cada cara de más obtenida (si hay empate, nadie paga). Éste afirma que es el campeón indiscutible en ese juego, y reta a todos los alumnos de su instituto a que cada uno juegue con él diez partidas. El reto es aceptado por todos, aunque nadie sabe que una de las monedas con que jugará el tramposo está trucada de tal forma que la probabilidad de lograr cara con la misma es el doble de la de obtener cruz.
Suponiendo que hay en el instituto 300 alumnos, y que todos van a jugar con monedas no trucadas, ¿qué cantidad de dinero es de esperar que se lleve este alumno a sus arcas?

Ejercicio 28.- Una ruleta contiene 37 números, de 0 a 36. Hay muchas maneras de apostar, pero nos fijamos en un jugador que hace apuestas a números únicos: "Si deposita una ficha sobre un número y sale éste, entonces cobrará 36 veces la apuesta".
Sabemos que el jugador sólo tiene tres fichas y que tiene una predilección especial por el 12, razón por la que está empeñado en hacer una de las siguientes apuestas:

a) Apostar las tres fichas al 12
b) Apostar al 12 tres veces
c) Apostar cada ficha a un múltiplo de 12

¿Qué opción deberíamos aconsejarle?

X = dinero ganado.
Caso a)

x_i	0	108
$f(x_i)$	36/37	1/37

E[X] = 108/37

Caso b)

x_i	0	36	72	108
$f(x_i)$	$\frac{36^3}{37^3}$	$\frac{3.36^2}{37^3}$	$\frac{3.36}{37^3}$	$\frac{1}{37^3}$

E[X] = 108/37

Caso c)

x_i	0	36
$f(x_i)$	34/37	3/37

E[X]= 108/37

EJERCICIOS PROPUESTOS DE V.A. CONTINUA

Ejercicio 1.- Una función de densidad de una variable aleatoria es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & si \quad 0 < x < 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcula P (2 < X < 4), P (X > 3), P (X < 0)
c) Representa gráficamente la función de distribución.

Ejercicio 2.- La función de densidad de una variable aleatoria x es $f(x) = \begin{cases} kx & si \quad x \in [0 \quad 5] \\ 0 & si \quad x \notin [0 \quad 5] \end{cases}$

a) Hallar k y la función de distribución.
b) Hallar la media y la varianza de x
c) Calcular P(0 < X < k)

Ejercicio 3.- La función de distribución de una variable aleatoria es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{4} & si \quad x \in [-1 \quad 1] \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad, la media y la varianza de x.

Ejercicio 4.- La función de densidad de una variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ k & si \quad 0 \leq x < 1 \\ k' & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar las constantes k y k' sabiendo que P(0 < X < 1,5) = 0,7. Luego hallar la función de distribución y dibujar su gráfica.

Ejercicio 5.- Obtener el valor de c sabiendo que es un número real positivo, para que la

función $f(x) = \dfrac{e^x}{c}$

pueda ser función de densidad de una variable aleatoria continua X, definida en el intervalo [0, 1]. Calcular la función de distribución, así como P (X > ½) ; esperanza de X.

Ejercicio 6.- La función de densidad de una variable aleatoria es

$$f(x) = \begin{cases} kx + \dfrac{1}{2} & si \quad x \in [0 \quad 3] \\ 0 \quad si & x \notin [0 \quad 3] \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de los sucesos A, A B, B U C, C siendo
A= (X > 3/2), B = (1 < X < 3), C = (3/2 < X < 2)

Ejercicio 7.- Un jugador tira al blanco. La distribución de los impactos en torno a la diana viene dada por la función de densidad f(x) = e^{-kx} donde x representa la distancia del impacto a la diana. Hallar el valor de k y la función de distribución.

TEMA X

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL
(Caso particular de v.a. discreta)

Experimento de Bernouilli:

Se llama así a un experimento aleatorio con las siguientes características:

a) En cada prueba estudiamos sólo la realización de un suceso A (éxito) y su contrario ContA (fracaso). Se realizan n pruebas.

b) La proporción de éxitos y fracasos es constante en la población y no se modifica cualquiera que sea la cantidad de elementos de la población observada. Llamamos p = P(A) , probabilidad de éxito y q = P(contA) = 1-p, probabilidad de fracaso.

c) Las n pruebas son independientes; es decir, el resultado de una prueba no depende de las precedentes.

Este experimento genera un espacio muestral del tipo:

$\Omega = \{AA...A, \quad \neg AA...A, \quad ... \quad \neg A\neg A..\neg A\}$, que tiene exactamente 2^n elementos ya que como podemos observar son las variaciones con repetición de 2 elementos (A y su contrario) tomados de n en n.

Sobre este espacio muestral definimos la siguiente variable aleatoria

X=”número de éxitos”

Es obvio que el recorrido de X es {0,1,2,3,...,n} y dado que es finito estamos ante una variable aleatoria discreta.

Bajo las circunstancias anteriores, se dice que X es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial de parámetros n y p, representándose así:

B(n,p)

Función de masa de probabilidad de una binomial:

Dado que el recorrido de X es {0,1,2,3,...,n}, la función de masa de probabilidad es:

f: $\{0,1,2,3,...,n\} \rightarrow [0,1]$,

siendo f(r) = P(X=r) o dicho de otro modo, la probabilidad de que al realizar n pruebas, se obtengan r éxitos (r toma valores de 0 a n)

Si aplicamos el hecho de que las pruebas son independientes, la probabilidad pedida es el producto de las probabilidades en cada prueba, pero en cada prueba sólo puede salir A o contA, y como sabemos que A aparece r veces y contA n-r veces, resulta que la probabilidad de cada caso es $p^r q^{n-r}$, ahora bien...¿en cuántos casos salen exactamente r éxitos? La combinatoria nos dice que son $RP_r^{r,n-r} = \frac{r!}{r!(n-r)!}$, pero obsérvese que esto es lo mismo que $C_n^r = \binom{n}{r}$, por lo tanto la probabilidad buscada es:

$$f(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}, donde\, r = 0,1,2,..., n$$

Dada la complejidad en los cálculos, estos valores vienen ya determinados en una tabla.

Función de distribución de una B(n,p):

Se trata de la función de mása de probabilidad acumulada, por tanto será una función del tipo:

$F: R \rightarrow R$, de tal modo que: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{q} f(r)$, siendo q el mayor entero tal que $q \leq x$.

Verifica todas las propiedades de las funciones de distribución de una variable aleatoria discreta.

Medidas características de una distribución binomial:

Media o esperanza:

$$\mu = \sum_{r=0}^{n} r.f(r) = np$$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{r=0}^{n} (r-\mu)^2 f(r)} = \sqrt{npq}$$

Como calcular los valores de la función de masa de probabilidad y la función de distribución de una binomial n, p en EXCEL:

La función que lo determina es, dentro de las funciones estadísticas, DISTR.BINOM. y los parámetros que pide son:

Núm_éxito (número); Ensayos (número); Prob_éxito (número); Acumulado (valor lógico)

Núm éxito es el valor de r; Ensayos es el valor de n o número de pruebas; Prob_éxito es p; Acumulado puede ser Verdadero o Falso. Si es verdadero da la el valor de la función de distribución F(r), mientras que si es falsa da el valor de la función de masa de probabilidad f(r)

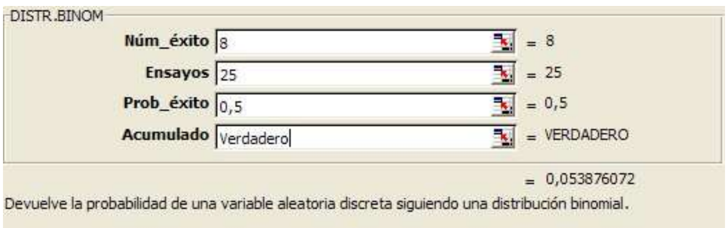


Ilustración 1

Supongamos que lanzamos 25 veces una moneda y queremos saber cual es la probabilidad de obtener 8 caras como máximo.

En Excel introduciríamos en la función DISTR.BINOM., los parámetros de la ilustración 1, es decir, hallaríamos F(8) cuyo valor sería 0,053. Por el contrario si quisiéramos hallar f(8), es decir la probabilidad de obtener 8 caras exactamente, solamente tendríamos que modificar el parámetro "Acumulado", donde tendríamos que consignar "Falso".

La función BINOM.CRIT.

Actúa de modo inverso que la anterior, esto es: Si conocemos el valor de probabilidad de un suceso, averigua el valor de r de forma que la probabilidad hasta dicho valor, acumulada, coincida con la dada.

Por ejemplo: Supongamos que en el ejemplo anterior queremos conocer cuántas caras como máximo dan probabilidad 0,7.

El resultado viene dado en la siguiente ilustración:

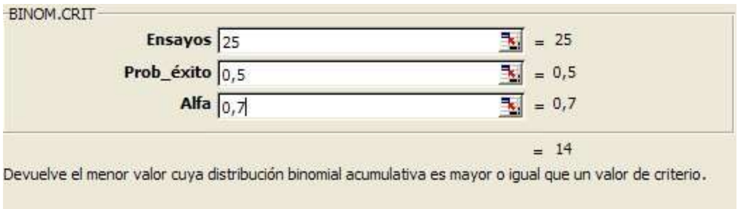


Ilustración 2

PROBLEMAS PROPUESTOS DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Ejercicio 1.- En un taller hay 10 máquinas iguales. Se ha visto que una máquina determinada un día de cada cinco está averiada. ¿Calcula la probabilidad de que un cierto día haya más de 7 máquinas averiadas? Si es 5000 pesetas la pérdida diaria ocasionada por tener una máquina averiada, calcular la pérdida media diaria.

Ejercicio 2.- De la producción diaria de una cierta pieza se examinan 10 de dichas piezas durante 23 días, dando la siguiente tabla de piezas defectuosas:

dias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
p.d.	0	1	1	2	1	3	2	2	1	0	1	2	1	2	0	2	3	0	2	1	0	1	1

Suponiendo que la probabilidad de fabricar una pieza defectuosa es fija, ajustar una distribución binomial a las observaciones.

Ejercicio 3.- Si la distribución hallada en el problema anterior es la verdadera ley del proceso, ¿Cuál es la probabilidad de que en las 10 piezas observadas, de un día determinado, haya más de 2 defectuosas.

Ejercicio 4.-Se sabe que, en un nacimiento, no se tiene la misma probabilidad de que sea niño que niña, pues la experiencia nos dice que nacen más niños que niñas. Si suponemos que de cada 100 recién nacidos 55 son varones y 45 mujeres. a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene un recién nacido de ser mujer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 primeros recién nacidos del año en un hospital sean niñas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 2 niñas entre los cinco primeros?

Ejercicio 5.-En los exámenes de selectividad del curso 1997/98 aprobaron en Galicia el 85% de los alumnos presentados. Calcular la probabilidad de que al coger 7 alumnos a) aprueben 3. b) aprueben más de uno.

Ejercicio 6.-Para participar en un concurso de tiro al plato hay que abonar una cuota. Cada participante realiza 10 disparos: Si acierta 5 recupera el importe pagado abandonando la competición y si acierta más se clasifica para la siguiente ronda. Un competidor muy regular acostumbra a acertar el 40% de sus disparos. a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente 5 disparos? b) ¿Cuál es la probabilidad de que se clasifique?

Ejercicio 7.-Al transmitir una comunicación, la probabilidad de distorsionar un signo es igual a 1/10. ¿Cuáles son las probabilidades de que en una comunicación de 10 signos a) No sea distorsionada. b) Contenga exactamente tres distorsiones. c) Contenga tres distorsiones como máximo.

Ejercicio 8.-Cada miembro de un comité de 9 personas acude a las reuniones con una probabilidad igual a ½. ¿Cuál es la probabilidad de que, como mucho, se reunan 2/3 de los miembros.

Ejercicio 9.-Se lanza una moneda a) 4 veces, b) 5 veces, c) 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad en cada caso de obtener un número impar de caras?.¿ Y para n veces?

Ejercicio 10.-Hallar la probabilidad de obtener un total de 11 a) una vez, (b) dos veces, en dos lanzamientos de un par de dados

Ejercicio 11.-¿Cuál es la probabilidad de obtener 9 una vez en tres lanzamientos de un par de dados?

Ejercicio 12.-Un vendedor de seguros vende pólizas a 5 hombres, todos de la misma edad y con buena salud. Se sabe que la probabilidad de que un hombre viva 30 años o más es 2/3. Hallar la probabilidad de que a los 30 años vivan a) los 5 hombres. b) al menos 3. c) Solamente 2. d) al menos 1.

Ejercicio 13.-Se lanzan 6 veces una moneda ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado cruz no salga nunca más veces que el resultado cara?

Ejercicio 14.-Un jugador propone a un amigo el siguiente juego: se lanza 20 veces una moneda. El amigo gana si aparece cara 9, 10 o 11 veces y pierde en caso contrario. Este juego ¿ es favorable al amigo ?

Ejercicio 15.-Se ha estudiado que 1/3 de los alumnos de COU no leen nunca la prensa diaria. Tomando una muestra al azar de 10 alumnos estudiar las probabilidades siguientes:

a) Encontrar dos alumnos que no leen la prensa. b) Más de 3 alumnos que no leen la prensa. c) Por lo menos cinco alumnos que no leen la prensa.

SOLUCIONES: **1)** 0,0035 ; 10.000 ptas. // **2)** B (10, 0,126) // **3)** 0,1219 // **4)** a. 0,45; b.0,0185; c.0,3369 // **5)** a. 0,0109; b. 0,9999 // **6)** a. 0,2007; b. 0,1663 // **7)** a. 0,3487; b. 0,0574; c. 0,9872 // **8)** 0,9101 // **9)** a. 0,5; b. 0,5; c. 0,5 // **10)** a. 17/162; b. 1/324 // **11)** 64/243 // **12)** a. 0,1317; b. 0,7901; c. 0,1646; d. 0,9959 // **13)** 0,6563 // **14)** No es favorable // **15)** a. 0.1951; b. 0,4408; c. 0,2131 //

TEMA XI

DISTRIBUCIÓN NORMAL

(Caso particular de v.a. continua)

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una distribución ormal de media μ y desviación típica σ, simbolizándose por N(μ , σ), si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \; ; \quad -\infty < x < +\infty$$

La distribución normal aparece espontáneamente en multitud de problemas, medidas físicas del cuerpo humano, características psíquicas, medidas de calidad,...,etc.

Gráfica de f(x)

1) f tiene dominio en R y es continua.
2) f(x)>0, para todo x real.
3) f es simétrica respecto a la recta $x = \mu$
4) f tiene un máximo en el punto (μ , $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$)
5) f tiene una asíntota en el eje OX
6) f presenta puntos de inflexión en las abscisas x- μ , x+ μ

Este es el aspecto que presenta:

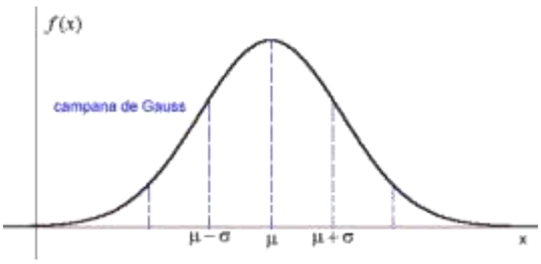


Ilustración 3

Función de distribución de una variable aleatoria normal:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Distribución normal estándar o tipificada:

Cuando μ =0 y σ =1, entonces la variable aleatoria normal N(0,1) se llama distribución normal tipificada o estándar. La función de densidad correspondiente es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}x^2} \; ; \; -\infty < x < +\infty$$

TEOREMA (Tipificación de una variable aleatoria normal)

Si X es una v.a. normal N(μ , σ), entonces la variable Z= $\frac{X-\mu}{\sigma}$ es una normal tipificada.

En efecto, recurriendo a las propiedades de la esperanza y la varianza, se tiene:

$$E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}E[X-\mu] = \frac{1}{\sigma}\left(E[X]-\mu\right) = 0$$

$$Var\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2}Var[X-\mu] = \frac{1}{\sigma^2}Var[X] = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

En base a este resultado, como toda normal puede, mediante un cambio de variable, convertirse en una tipificada, cualquier resultado puede ser estudiado en las tablas de la variable Z y luego volver a deshacer el cambio de variable para obtener el resultado en la variable original X.

Por ello, la función de distribución de la variable normal tipificada viene desarrollada en la siguiente tabla:

Obsérvese que F(z) viene tabulada para valores de 0 en adelante, asi pues se hace necesario averiguar F(-z) cuando z>0. El resultado es: F(-z) = 1-F(z)

La demostración es trivial.

También se tiene que $P(z_1 \le Z \le z_2) = F(z_2) - F(z_1)$

Funciones en EXCEL para trabajar con la distribución normal:

La primera es DISTR.NORMAL que devuelve el valor de probabilidad de un valor x de la variable (en realidad toma un pequeño intervalo entorno al mismo) o el valor de probabilidad acumulada hasta el mismo. La ilustración siguiente lo refleja:

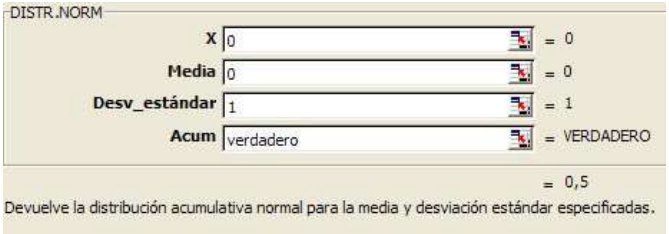


Ilustración 4

Donde x es el valor de la variable objeto de estudio, Media es el valor de la media de la variable, Desv_estándar es el valor de la desviación típica y acumulado es un campo lógico que puede tomar dos valores: verdadero (se obtiene F(x)) y falso (se obtiene P(0,5-x<X<0,5+x))

La inversa de la anterior es DISTR.NORM.INV. donde, una vez conocido el valor de probabilidad acumulado, nos devuelve el valor de la variable donde se alcanza dicha probabilidad. Veamos el ejemplo en una N(3,0.5) para probabilidad 0,3. En la ilustración 5 observamos que el resultado es 2,73. Esto quiere decir que P(X<2,73)=0,3

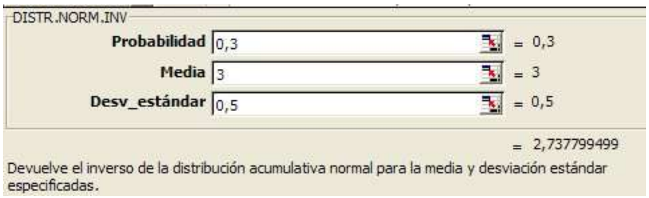


Ilustración 5

Análogamente a la anterior, tenemos la DISTR.NORM.ESTAND. que en trabaja directamente con la N(0,1) y los únicos parámetros a introducir son el valor de z . Obteniéndose como resultado F(z).

La función DISTR.NORM.ESTAND.INV., actúa de forma inversa que la anterior, es decir, conocemos la probabilidad y deseamos averiguar el valor de z con ese valor de probabilidad acumulado.

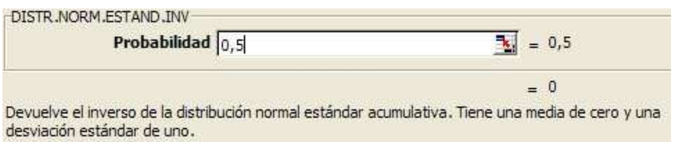


Ilustración 6

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL POR LA NORMAL

Cuando estamos ante una distribución binomial con un número de pruebas muy elevado, se hace muy laborioso el cálculo de las probabilidades ya que las tablas publicadas normalmente no van más allá de 10 pruebas.

Si no disponemos de un programa (EXCEL u otros) que nos permiten averiguar el resultado exacto, en este caso se utiliza el siguiente teorema que permite calcular probabilidades en una distribución binomial, utilizando la normal. Esta aproximación será tanto mejor como el valor de p se aproxime a 0,5 y n sea muy grande.

Si X sigue una distribución B(n,p), entonces sus valores pueden ser aproximados mediante una distribución normal $N(np, \sqrt{npq})$**.**

Aquí hay que hacer la siguiente matización:

Dado que en una distribución normal, la probabilidad de un valor concreto de la variable era 0, ¿cómo se efectúa la aproximación anterior toda vez que en la distribución binomial ese valor no es nulo?.

La respuesta es la siguiente:

$$P_B(X = a) \cong P_N(a - 0{,}5 \leq a \leq a + 0{,}5)$$

Entendemos por P_B cuando trabajamos con la binomial y P_N cuando se aplica la normal.

Este procedimiento de tomar media unidad antes o después de valor de la variable, se extiende también a las probabilidades de los intervalos, es decir:

$$P_B(a < X < b) \cong P_N(a + 0{,}5 \leq X \leq b - 0{,}5)$$

$$P_B(a \leq X \leq b) \cong P_N(a - 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5)$$

Recordemos que en cualquier caso, cuando se trata de trabajar con la distribución normal, es indiferente, a efectos de cálculo de probabilidades en intervalos, que se tomen o no los extremos, es decir que:

$P_N(a < X < b) = P_N(a \leq X \leq b)$, debido precisamente al carácter continuo de la variable.

PROBLEMAS PROPUESTOS DE DISTRIBUCIÓN NORMAL

Ejercicio 1.- Si los diametros de los cojinetes de bolas se distribuyen normalmente con media 0,6140 pulgadas y desviación típica 0,0025 pulgadas, determinar el porcentaje de cojinetes de bolas con diametro:

a) Entre 0,610 y 0,618 pulgadas
b) Mayor de 0,617 pulgadas
c) Menor de 0,608 pulgadas.

Ejercicio 2.- La puntuación media en un examen final fue 72 y la desviación típica 9. El 10% de los alumnos tuvieron la calificación de sobresaliente (nota máxima). ¿ Cuál es la puntuación mínima para recibir un sobresaliente sabiendo que la distribución de las notas es normal.

Ejercicio 3.- Una variable aleatoria X tiene una distribución normal con una esperanza matemática igual a 0 y una varianza igual a 1. ¿ Cuál de los dos sucesos tiene mayor probabilidad ?

$$(|x| < 0{,}7) \quad ó \quad (|x| > 0{,}7)$$

Ejercicio 4.- Cierta categoría de individuos tiene un peso medio de 60 Kg. y una desviación típica del peso igual a
3 Kg. Determinar la probabilidad de que el peso de un individuo tomado al azar se distinga de la me
dia no más que en 5 Kg, sabiendo que el peso se distribuye normalmente.

Ejercicio 5.- La talla de los hombres en edad militar en España sigue una distribución normal de media 169 cm. y desviación típica 6 cm. Si no se admiten para el servicio militar los individuos de talla inferior a 150 cm., ¿ qué proporción se rechaza ?

Ejercicio 6.- Supongamos que en cierto curso las notas de matemáticas se distribuyen normalmente con una media de 6 (sobre 10) y una desviación típica de 3.

a) Si se elige un alumno al azar, ¿ cuál es la probabilidad de que su nota esté comprendida entre 7 y 8 ambos inclusive?
b) ¿ Y la de que tenga una nota igual o superior a 9 ?

Ejercicio 7.- Una población de mazorcas de maiz se distribuye normalmente respecto al carácter longitud con una media de 25 cm. y una desviación típica de 5. Calcular la probabilidad de que una mazorca elegida al azar mida a) Entre 22 y 27 cm. b) 27 o más de 27 cm. c) entre 26 y 30. d) a lo sumo 20 cm.

Ejercicio 8.- Entre 2000 estudiantes la media del peso resultó ser 70 Kg. con una desviación típica de 8,5 Kg. Determinar el peso mínimo del conjunto formado por los 200 estudiantes más pesados.

Ejercicio 9.- Los errores aleatorios que se cometen en las pesadas de una balanza siguen una normal de media 0 y desviación típica 2 decigramos. Hallar el error máximo en una pesada con una probabilidad del 0,95.

Ejercicio 10.- La media de una v.a. X normal es el quíntuplo de la desviación típica. Sabiendo que P (X<6) = 0,8413, calcular la media y la desviación típica.

Ejercicio 11.- Hallar la probabilidad de que entre 100.000 cifras al azar la cifra 6 salga menos de 9.971 veces.

Ejercicio 12.- Hallar el valor aproximado de la probabilidad de que la cantidad de "nueves" entre 10.000 números aleatorios quede comprendido entre 940 y 1060. (Se llaman números aleatorios al número resultantes de elegir al azar un dígito entre 0 y 9 ambos inclusive)

Ejercicio 13.- Sea A un suceso de probabilidad 0,4. Suponiendo que se hacen 900 pruebas del experimento, calcular la probabilidad de que A se verifique entre 360 y 390 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que A se verifique exactamente 380 veces.?

Ejercicio 14.- Hallar la probabilidad de obtener tantas caras como cruces en 100 lanzamientos de una moneda.

SOLUCIONES: **1)** a. 89% ; b. 11,5 % ; c. 0,8 % // **2)** 83,5 // **3)** 0,5178 ; 0,4822 // **4)** 0,9030 // **4)** 8 de cada 10.000 // **5)** a. 0,1161 ; b. 0,1587 // **6)** a. 0,3811 ; b. 0,3446 ; c. 0,2620 ; d) 0,1587 // **7)** 80,8 // **8)** 3,3 dg. // **9)** x = 3 ; σ = 0,6 // **10)** 0,1814 // **11)** 0,9998 // **12)** 0,4652 ; 0,0111 // **13)** 0,07958

SUPLEMENTO

PROBLEMAS RESUELTOS DE VARIABLE ALEATORIA

1) Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda al aire 3 veces. Sea x la variable aleatoria que indica el número de caras obtenidas.
  d) Hallar el espacio muestral y definir la variable aleatoria X.
  e) Hallar la función de masa de probabilidad de X y la función de distribución.
  f) Calcular la probabilidad de los sucesos (X>1) (1<X<3)

SOLUCIÓN:
  a) El espacio muestral es {ccc, cc+,c+c,+cc,++c,+c+,c++,+++}. Siendo el recorrido de la variable aleatoria {0,1,2,3}.
  b) función de masa de probabilidad viene dada por la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1/8 & si \quad 0 \le x < 1 \\ 4/8 & si \quad 1 \le x < 2 \\ 7/8 & si \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

c) P(X>1) = 4/8 ; P(1<X<3) = 3/8

2) Una urna contiene cuatro bolas negras y dos blancas. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en extraer tres bolas (sin devolución) de la urna. Definir la variable aleatoria X "número de bolas negras obtenidas".
  a) Hallar la función de masa de probabilidad y de distribución de la v.a. X.
  b) Calcular la probabilidad de los sucesos (X < 2) (X > 2)

SOLUCIÓN:
  a) La función de masa de probabilidad viene dada por la tabla:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	24/120	72/120	24/120

b) P(X<2) = 24/120 ; P(X>2) = 24/120

3) Dada la variable aleatoria X y la función de masa de probabilidad

x	**- 2**	**- 1**	**0**	**2**	**4**
f(x)	**1 / 8**	**1 / 6**	**3 / 8**	**1 / 4**	**1 / 12**

  a) Calcular la esperanza, varianza y desviación típica de X
  b) La función de distribución.

SOLUCIÓN:

a) E[X] = -2.1/8 – 1.1/6 + 2.1/4 + 4. 1/12 = 5/12

b) $$F(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<-2 \\ 1/8 \quad si \quad -2\le x<-1 \\ 7/24 \quad -1\le x<0 \\ 16/24 \quad si \quad 0\le x<2 \\ 11/12 \quad si \quad 2\le x<4 \\ 1 \quad si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

4) Hallar el valor de a en las siguientes distribuciones de probabilidad

x	**1**	**2**	**3**	**4**		**x**	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**
f(x)	**0,2**	**a**	**3a**	**0,4**		**g(x)**	**a**	**3 a**	**2 a**	**3 a**	**a**

En ambos casos hallar la función de distribución y los parámetros

SOLUCIÓN:

Para la primera se tiene que: 4 a + 0,6 =1, de donde a = 0,1
Para la segunda se tiene que 10 a = 1, de donde a = 0,1

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<1 \\ 0{,}2 \quad si \quad 1\le x<2 \\ 0{,}3 \quad si \quad 2\le x<3 \\ 0{,}6 \quad si \quad 3\le x<4 \\ 1 \quad si \quad x\ge 4 \end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<0 \\ 0{,}1 \quad si \quad 0\le x<2 \\ 0{,}4 \quad si \quad 2\le x<3 \\ 0{,}6 \quad si \quad 3\le x<4 \\ 0{,}9 \quad si \quad 4\le x<5 \\ 1 \quad si \quad x\ge 5 \end{cases}$$

5) Una función de densidad de una variable aleatoria es:

$$f(x)=\begin{cases} 1/5 \quad si \quad 0<x<5 \\ 0 \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Calcula P (2 < X < 4), P (X > 3), P (X < 0) y representa gráficamente la función de distribución.

SOLUCIÓN

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<0 \\ \frac{1}{5}x \quad si \quad 0\le x<5 \\ 1 \quad si \quad x\ge 5 \end{cases}$$ de donde P(2<X<4) = F(4)-F(2) = 2/5 ;

P(X>3)=1-F(3) = 2/5 ; P(X<0) = 0

6) **La función de densidad de una variable aleatoria x es** $f(x) = \begin{cases} kx & si \quad x \in [0 \quad 5] \\ 0 & si \quad x \notin [0 \quad 5] \end{cases}$

Hallar k y la función de distribución.

Hallar la media y la varianza de x

Calcular P(0 < X < k)

SOLUCIÓN:

$$\int_0^5 Kxdx = \left[k\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{25}{2}k = 1; \quad \text{de donde k = 2/25}$$

La media o esperanza de X es $\int_0^5 \frac{2}{25} x^2 dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{10}{3}$

7) **La función de distribución de una variable aleatoria es**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{4} & si \quad x \in [-1{,}1] \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad y la media

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & si \quad x \in [-1{,}1) \\ 0 & si \quad x \notin [-1{,}1] \end{cases}$$

La media o esperanza es: $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = 1/3$

8) La función de densidad de una variable aleatoria X es

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ k & si \quad 0<x<1 \\ k' & si \quad 1<x<2 \\ 0 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Hallar las constantes k y k' sabiendo que P(0 < X < 1,5) = 0,7. Luego hallar la función de distribución.

SOLUCIÓN:

Por ser f función de densidad se tiene: $\int_0^1 k\,dx+\int_1^2 k'\,dx=1 \Rightarrow k+k'=1$

Por otra parte y dado que P(0 < X < 1,5) = 0,7, resulta que $\int_0^1 k\,dx+\int_1^{1,5} k'\,dx=0{,}7 \Rightarrow k+0{,}5k'=0{,}7$, de ambas ecuaciones se obtiene k = 0,4 y k'=0,6

La función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 0{,}4x & si \quad 0\le x<1 \\ 0{,}6x-0{,}2 & si \quad 1\le x<2 \\ 1 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

9) Obtener el valor de c sabiendo que es un número real positivo, para que la función f(t) = e^t / c pueda ser función de densidad de una variable aleatoria continua X, definida en el intervalo [0, 1]. Calcular la función de distribución, así como P (X > ½) ; esperanza de X.

SOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{e^t}{c}dt=1 \Rightarrow \frac{e}{c}-\frac{1}{c}=1 \Rightarrow c=e-1$$

La función de distribución de esta variable aleatoria viene determinada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \dfrac{e^x-1}{e-1} & si \quad 0\le x<1 \\ 1 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

El valor de P (X > ½) = 1-F(1/2) = 0,6224 y la esperanza es 1/(e-1) = 0,5819

10) La función de densidad de una variable aleatoria es

$$f(x)=\begin{cases} kx+1/2 & si \quad x\in[0,3] \\ 0 & si \quad x\notin[0,3] \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de los sucesos A, B, B U C, C siendo A= (X > 3/2), B = (1 < X < 3), C = (3/2 < X < 2)

SOLUCIÓN:

En primer lugar hay que hallar k, cuyo valor se obtiene del siguiente modo:

$$\int_0^3 kx+\frac{1}{2}dx=\left[\frac{kx^2}{2}+\frac{kx}{2}\right]_0^3=1\Rightarrow 6k=1\Rightarrow k=\frac{1}{6}$$

Calculemos ahora las probabilidades de A, B y C respectivamente:

P(A) = $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}dx=\left[\frac{x^2}{12}+\frac{x}{12}\right]_0^{\frac{3}{2}}=5/16$, del mismo modo se tiene que P(B)=5/6 y P(C) = 3/16.

P(BUC)=P(B)+P(C)-P(ByC), ahora bien, ByC es el suceso C, por tanto P(BUC)=5/6

11) Un jugador tira al blanco. La distribución de los impactos en torno a la diana viene dada por la función de densidad f(x) = e^{-kx} donde x representa la distancia del impacto a la diana. Hallar el valor de k y la función de distribución.

SOLUCIÓN:

$$\int_0^\infty e^{-kx}dx=1\Rightarrow\left[\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-kt}}{-k}\right]_0^t=1\Rightarrow \text{k=1}$$

La función de distribución es $F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<0\\ 1-e^{-x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

12) La probabilidad de tener éxito en una prueba es p = 0,6. Cuál es la probabilidad de conseguir 4 o 5 éxitos en 10 pruebas

SOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial para n=10 y p=0,4 ya que 0,6 no viene en las tablas. Por tanto la probabilidad pedida es: P(X=6)+P(X=5) siendo X=”número de fracasos” El valor pedido es: 0,3122

13) Un tirador tiene una probabilidad de acertar igual a 0,8. ¿ Cuál es la probabilidad de que en cinco disparos acierte al menos 4 ?

SOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial para n=5 y p=0,2 ya que 0,8 no viene en las tablas. Por tanto la probabilidad pedida es: P(X<2), siendo X=”número de fallos”. La probabilidad pedida es: 0,7373

14) Supongamos que un sistema de 8 componentes independientes requiere para su funcionamiento que al menos 6 estén en buen estado. Si la probabilidad de funcionamiento de cada componente es 0,95, calcular la probabilidad del sistema definida por la probabilidad de que funcione. Calcular la esperanza y la desviación típica.

SOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial para n=8 y p=0,05 ya que 0,95 no viene en las tablas. Por tanto la probabilidad pedida es: P(X<3), siendo X=”número de componentes en mal estado”. La probabilidad pedida es: 0,9942.

La esperanza es 8.0,95= 7,6 (es decir entre 7 y 8 componentes que funcionen) ya que si tomo 8.0,05=0,4 (sería entre 0 y 1 componente que fallen).

La desviación tipica de la variable “Numero de componentes que funcionan como que fallen” será: 0,6164

15) La probabilidad de que un equipo de futbol gane a otro equipo determinado es 1 / 4. Se juegan 6 partidos. Se pide:

a) La probabilidad de que gane por lo menos dos veces.

b) Calcular el número de partidos que tiene que jugar para que la probabilidad de ganar por lo menos una vez sea mayor que 3/5.

SOLUCIÓN

a) Se trata de una distribución binomial para n=6 y p=0,25. Por tanto la probabilidad pedida es: $P(X>1)$, siendo X=”número de partidos ganados”. La probabilidad pedida es: 0,4660

b) $P(X>0)>3/5$ $1-P(X=0)>3/5$ $P(X=0)<2/5$. Solución 4 partidos como mínimo ya que en las tablas el primer valor de n que hace esa probabilidad menor que 2/5 es 4.

16) Un alumno debe realizar un examen de 8 preguntas con respuestas de sí o no. ¿ Qué probabilidad tiene de contestar correctamente por lo menos a la mitad de ellas si desconoce por completo la materia del examen ?

SOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial para n=8 y p=0,5. Por tanto la probabilidad pedida es: $P(X>3)$, siendo X=”número de aciertos”. La probabilidad pedida es: 0,6367

17) Calcular la probabilidad de que al lanzar al aire 5 veces una moneda se obtengan al menos dos caras.

SOLUCIÓN:

Se trata de una distribución binomial para n=5 y p=0,5. Por tanto la probabilidad pedida es: $P(X>1)$, siendo X=”número de caras”. La probabilidad pedida es: 0,1874

18) Suponiendo que Z es la distribución normal tipificada, calcular

a) $P(z>0{,}7)$ $P(1<z<1{,}37)$ $P(|z|>1{,}05)$

SOLUCIÓN:

a) 0,2420 b) 0,0733 c) 0,2938

18) Las alturas de 300 estudiantes se distribuyen normalmente con una media igual a 172 cm. y una desviación típica de 7 cm. ¿ Cuántos estudiantes tienen altura: mayor que 182 cm. ; menor que 163 cm. ; entre 165 y 181cm. ; igual a 172 cm.

SOLUCIÓN:

Nos piden las siguientes valores: $300.P(X>182)$; $300.P(X<163)$; $300.P(165<X<181)$; $300.P(X=172)$.

Tipificando los valores de X, resulta:

X	182	163	165	181	172
Z	1,43	-1,28	-1	1,28	0

Por tanto $300.P(X>182) = 300.\ P(Z>1{,}43)=300.[1-P(Z<=1{,}43)]=300.(1-0{,}9236)=23$

$300.P(X<163)= 300.P(Z<-1{,}28)=300.[1- P(Z<1{,}28)]=300.(1-0{,}8997)=30$

$300.P(165<X<181)= 300.P(-1<Z<1{,}28)=300.(0{,}8997-1+0{,}8413)=222$;

$300.P(X=172)=0$.

19) Los pesos de los habitantes de una población se distribuyen normalmente con una media de 65 Kg. y una desviación típica de 6 Kg. Calcular la probabilidad de que un individuo de dicha población pese:
a) a lo sumo 65 Kg. b) entre 60 y 75 Kg. c) más de 75 Kg.

SOLUCIÓN:

a) el valor tipificado de 65 es 0. Así pues la respuesta es 0,5.
b) el valor tipificado de 60 y 75 es respectivamente –0,83 y 1,67, de donde P(-0,83<Z<1,67)=0,9525-1+0,7967=0,7492
c) el valor tipificado de 75 es 1,67, entonces P(Z>1,67)=1-0,9525=0,0475

20) Sea X una variable aleatoria normal tal que P (X < 15) = 0,1003 y P (X < 20) = 0,9605. Calcular:
a) Calcular la media y la desviación típica de x.
b) P (16,5 < X < 17,8)
c) Calcular el número k tal que P(X > k) = 0,5

SOLUCIÓN:

a) $P(Z < \dfrac{15-\mu}{\sigma}) = 0{,}1003$; $P`(Z < \dfrac{\mu-15}{\sigma}) = 0{,}8997$; $\dfrac{\mu-15}{\sigma} = 1{,}28$

$P(Z < \dfrac{20-\mu}{\sigma}) = 0{,}9605$; $\dfrac{20-\mu}{\sigma} = 1{,}81$, obteniéndose un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son 17,07 para la media y 1,62 para la desviación típica.

c) Los valores tipificados de 16,5 y 17,8 son respectivamente –0,35 y 0,45, por tanto el resultado pedido es 0,6736-1+0,6368=0,3104

d) $P(Z > \dfrac{k-17{,}07}{1{,}62}) = 0{,}5$; de donde k=17,07

21) La talla de los hombres en edad militar en España sigue una distribución normal de media 169 cm. y desviación típica 6 cm. Si no se admiten para el servicio militar los individuos de talla inferior a 160 cm. ¿ Qué proporción se rechaza ?

22) Sea A un suceso de probabilidad 0,4. Suponiendo que se hacen 900 pruebas del experimento, calcular la probabilidad de que A se verifique exactamente 380 veces ?

23) Hallar la probabilidad de obtener tantas caras como cruces en 100 lanzamientos de una moneda.

24) Entre 2000 estudiantes la media del peso resultó ser 70 kg. con una desviación tíica de 8,5 Kg. Determinar el peso mínimo del conjunto formado por los 200 estudiantes más pesados.

25) Hallar la probabilidad de que entre 100000 cifras al azar la cifra 6 salga menos de 9971 veces.

26) La media de una variable aleatoria X normal es el quíntuplo de la desviación típica. Sabiendo que P(X < 6) = 0,8413, calcular la media y la desviación típica.

APENDICE TABLAS

Tabla de la distribución binomial B(n,p)

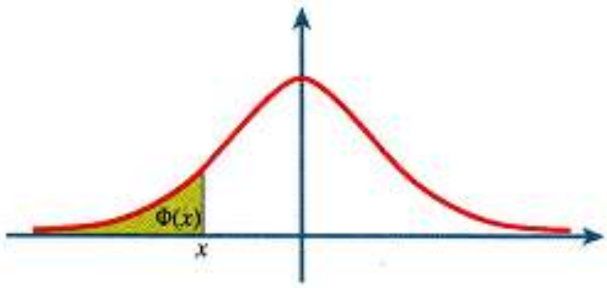
Se tabulan los valores:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

		Valores de p									
n	k	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.950	0.900	0.850	0.800	0.750	0.700	0.650	0.600	0.550	0.500
1	1	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500
2	0	0.903	0.810	0.723	0.640	0.563	0.490	0.423	0.360	0.303	0.250
2	1	0.095	0.180	0.255	0.320	0.375	0.420	0.455	0.480	0.495	0.500
2	2	0.003	0.010	0.023	0.040	0.063	0.090	0.123	0.160	0.203	0.250
3	0	0.857	0.729	0.614	0.512	0.422	0.343	0.275	0.216	0.166	0.125
3	1	0.135	0.243	0.325	0.384	0.422	0.441	0.444	0.432	0.408	0.375
3	2	0.007	0.027	0.057	0.096	0.141	0.189	0.239	0.288	0.334	0.375
3	3	0.000	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125
4	0	0.815	0.656	0.522	0.410	0.316	0.240	0.179	0.130	0.092	0.063
4	1	0.171	0.292	0.368	0.410	0.422	0.412	0.384	0.346	0.299	0.250
4	2	0.014	0.049	0.098	0.154	0.211	0.265	0.311	0.346	0.368	0.375
4	3	0.000	0.004	0.011	0.026	0.047	0.076	0.111	0.154	0.200	0.250
4	4	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.015	0.026	0.041	0.063
5	0	0.774	0.590	0.444	0.328	0.237	0.168	0.116	0.078	0.050	0.031
5	1	0.204	0.328	0.392	0.410	0.396	0.360	0.312	0.259	0.206	0.156
5	2	0.021	0.073	0.138	0.205	0.264	0.309	0.336	0.346	0.337	0.313
5	3	0.001	0.008	0.024	0.051	0.088	0.132	0.181	0.230	0.276	0.313
5	4	0.000	0.000	0.002	0.006	0.015	0.028	0.049	0.077	0.113	0.156
5	5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.005	0.010	0.018	0.031
6	0	0.735	0.531	0.377	0.262	0.178	0.118	0.075	0.047	0.028	0.016
6	1	0.232	0.354	0.399	0.393	0.356	0.303	0.244	0.187	0.136	0.094
6	2	0.031	0.098	0.176	0.246	0.297	0.324	0.328	0.311	0.278	0.234
6	3	0.002	0.015	0.041	0.082	0.132	0.185	0.235	0.276	0.303	0.313
6	4	0.000	0.001	0.005	0.015	0.033	0.060	0.095	0.138	0.186	0.234
6	5	0.000	0.000	0.000	0.002	0.004	0.010	0.020	0.037	0.061	0.094
6	6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.016
7	0	0.698	0.478	0.321	0.210	0.133	0.082	0.049	0.028	0.015	0.008
7	1	0.257	0.372	0.396	0.367	0.311	0.247	0.185	0.131	0.087	0.055
7	2	0.041	0.124	0.210	0.275	0.311	0.318	0.298	0.261	0.214	0.164

		Valores de p									
n	**k**	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**	**0.35**	**0.4**	**0.45**	**0.5**
7	**3**	0.004	0.023	0.062	0.115	0.173	0.227	0.268	0.290	0.292	0.273
7	**4**	0.000	0.003	0.011	0.029	0.058	0.097	0.144	0.194	0.239	0.273
7	**5**	0.000	0.000	0.001	0.004	0.012	0.025	0.047	0.077	0.117	0.164
7	**6**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.008	0.017	0.032	0.055
7	**7**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008
8	**0**	0.663	0.430	0.272	0.168	0.100	0.058	0.032	0.017	0.008	0.004
8	**1**	0.279	0.383	0.385	0.336	0.267	0.198	0.137	0.090	0.055	0.031
8	**2**	0.051	0.149	0.238	0.294	0.311	0.296	0.259	0.209	0.157	0.109
8	**3**	0.005	0.033	0.084	0.147	0.208	0.254	0.279	0.279	0.257	0.219
8	**4**	0.000	0.005	0.018	0.046	0.087	0.136	0.188	0.232	0.263	0.273
8	**5**	0.000	0.000	0.003	0.009	0.023	0.047	0.081	0.124	0.172	0.219
8	**6**	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.010	0.022	0.041	0.070	0.109
8	**7**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.016	0.031
8	**8**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004
9	**0**	0.630	0.387	0.232	0.134	0.075	0.040	0.021	0.010	0.005	0.002
9	**1**	0.299	0.387	0.368	0.302	0.225	0.156	0.100	0.060	0.034	0.018
9	**2**	0.063	0.172	0.260	0.302	0.300	0.267	0.216	0.161	0.111	0.070
9	**3**	0.008	0.045	0.107	0.176	0.234	0.267	0.272	0.251	0.212	0.164
9	**4**	0.001	0.007	0.028	0.066	0.117	0.172	0.219	0.251	0.260	0.246
9	**5**	0.000	0.001	0.005	0.017	0.039	0.074	0.118	0.167	0.213	0.246
9	**6**	0.000	0.000	0.001	0.003	0.009	0.021	0.042	0.074	0.116	0.164
9	**7**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.010	0.021	0.041	0.070
9	**8**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.008	0.018
9	**9**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002
10	**0**	0.599	0.349	0.197	0.107	0.056	0.028	0.013	0.006	0.003	0.001
10	**1**	0.315	0.387	0.347	0.268	0.188	0.121	0.072	0.040	0.021	0.010
10	**2**	0.075	0.194	0.276	0.302	0.282	0.233	0.176	0.121	0.076	0.044
10	**3**	0.010	0.057	0.130	0.201	0.250	0.267	0.252	0.215	0.166	0.117
10	**4**	0.001	0.011	0.040	0.088	0.146	0.200	0.238	0.251	0.238	0.205
10	**5**	0.000	0.001	0.008	0.026	0.058	0.103	0.154	0.201	0.234	0.246
10	**6**	0.000	0.000	0.001	0.006	0.016	0.037	0.069	0.111	0.160	0.205
10	**7**	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.009	0.021	0.042	0.075	0.117
10	**8**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.011	0.023	0.044
10	**9**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.010
10	**10**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001

Tabla de la distribución N (0,1) con cola a la izquierda.



Se tabulan los valores

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998